REVISTA DA OLIMPÍADA
Número 15

Número Equilibrado pela Média Aritmética

Eudes Antonio Costa[1] | Bruno Costa Santos[2]

[1]Colegiado de Matemática - Arraias, Universidade Federal do Tocantins
[2]Acadêmico de Matemática - Arraias, Universidade Federal do Tocantins

Contato
[1]eudes@uft.edu.br
[2]costa.santos@uft.edu.br

Um número inteiro positivo a é equilibrado pela média aritmética se um de seus algarismos for a média aritmética dos outros algarismos. Aqui queremos estudar ou determinar condições para que a seja um *número equilibrado*.

1 | INTRODUÇÃO

Nestas notas consideraremos o conjunto dos números inteiros não negativos (naturais) denotado por $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, e por conveniência diremos apenas a é um número (natural). Considere a um número não nulo no sistema posicional decimal (base 10), ou seja um número com $k+1$ algarismos, e escrito na forma $a = a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0$, isto é, $a = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0$, em que $a_i \in D = \{0, 1, \cdots, 8, 9\}$ é um algarismo e $a_k \neq 0$. Detalhes adicionais podem ser encontrados em diversos livros de Aritmética, por exemplo [3].

Definição 1 *Um número a é equilibrado pela média aritmética se um dos seus algarismos é média aritmética dos demais, ou seja, para algum a_i temos*

$$M_i(a) = \frac{(a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0) - a_i}{k} = a_i \,. \tag{1}$$

Utilizaremos a notação $a^{(i)}$ para indicar que o número a é equilibrado e que o algarismo a_i, $i \in \{0, \ldots, k\}$, corresponde à média aritmética dos demais algarismos.

Exemplo 1 **1.** *Veja que $a^{(1)} = 456$ é equilibrado, pois $5 = M_1(456) = \frac{4+6}{2}$.*
2. *O número $a = 0 = 00 \cdots 0$ é equilibrado para qualquer quantidade de algarimos.*

No resto do texto consideramos $a \neq 0$, e por simplicidade (e conveniência) diremos apenas que o número a é *equilibrado* (pela média arimétrica). Aqui apresentamos a Definição 1, inspirada e generalizada de problemas do Banco de Questões da OBMEP[1].

2 | ALGUNS RESULTADOS

Dado um número a, lembramos que a *soma de algarismos* do número a, é obtido pela adição dos algarismos deste número. Formalmente temos que

Definição 2 *A aplicação soma de algarismos S é uma aplicação que a cada $a \in \mathbb{Z}_+$ na forma*

$$a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0 \,, \quad \text{com } k \in \mathbb{N},$$

associa ao número natural s dado por

$$S(a) = a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0 := s \,.$$

Segue da Definição 2 que $S(2020) = 2+0+2+0 = 4$. Enquanto $S(1234567123) = 1+2+3+4+5+6+7+1+2+3 = 34$.
Na Definição 1 podemos reescrever a equação (1) usando a aplicação soma dos algarismos, ou seja

$$M_i(a) = \frac{S(a) - a_i}{k}$$

sendo $k+1$ a quantidades de algarismos de a .

Exemplo 2 *O número $a^{(2)} = 657$ é equilibrado pois $S(657) = 6+5+7 = 18$ e $M_2(567) = \frac{18-6}{2} = 6$.*

Proposição 1 *Todo número $a \neq 0$ que possui seus $k+1$ algarismos iguais a $x \in D$, em que $x \neq 0$, é um número equilibrado.*

Demonstração Temos que a tem todos seus $k+1$ algarismos $a_k = a_{k-1} = \cdots = a_1 = a_0 = x$, assim $S(a) = (k+1) \cdot x$. Para todo a_i,

$$M_i(a) = \frac{S(a) - x}{k} = x, \text{ para } i = 0, 1, \ldots, k \,.$$

Exemplo 3 *Segue da Proposição 1 que todo número formado pela repetição de um algarismo é equilibrado. Assim o número $a = \underbrace{22\cdots2}_{2020\ vezes}$ é equilibrado.*

Definição 3 *Dado um número a com $k+1$ algarismos, considere o número a' com $k+1$ algarismos da forma $a' = a'_k a'_{k-1} \ldots a'_1 a'_0$, obtido de a permutando (trocando a posição de) seus algarismos, isto é, $a'_j \ (0 \leq j \leq k)$ é igual a algum $a_i \ (0 \leq i \leq k)$.*

Por exemplo os números 132, 213, 231, 312, 321 são permutações obtidas do número 123.
De agora em diante a' indicará qualquer número inteiro obtido de a permutando seus algarismos.

Proposição 2 *Se a é um número equilibrado com $k+1$ algarismos então a' também o é.*

Demonstração Temos que a é um número equilibrado, sem perda de generalidade tome $a^{(0)}$, assim $a_0 = M_0(a)$ e fixe a' uma permutação de a. Note que os algarimos de a e a' não mudam, apenas a posição em que tais algarismos se encontram é alterada, assim

$$\frac{S(a) - a_0}{n} = a_0 \,.$$

Se a_0 ocupa a posição j_0 então $a'^{(j_0)}$ é equilibrado. Como isso vale pra qualquer $0 \leq j \leq k$ que o algarismo a_0 ocupar, segue que toda permutação de a também é um número equilibrado.

Exemplo 4 *Dado $a^{(1)} = 456$, segue da Proposição 2 que todo número a' obtido pela permutação dos algarimos do número a é equilibrado. Assim 456, 465, 546, 564, 645 e 654 são números equilibrados.*

Vamos apresentar a seguir dois resultados que mostram como podemos obter (novos) números equilibrados.

Proposição 3 *Dado o número $b = a_{k-1} \cdots a_1 a_0$ com k algarismos, considere $s = \frac{S(b)}{k}$. Se $s \in \mathbb{Z}_+$ então $a = 10 \cdot b + s$ e a' são números equilibrados com $k+1$ algarismos.*

Demonstração É fácil ver que $0 < s \leq 9$. Caso s seja um número natural, segue da Definição 1 que $a^{(0)}$ é equilibrado, e que a' é equilibrado segue da Proposição 2 .

Exemplo 5 **1.** *Dado o número $b = 2020$, temos $S(b) = 4$, assim $s = 1$. Donde obtemos que $a^{(0)} = 20201$ e qualquer número a' obtido pela permutação dos algarimos do número a é equilibrado.*

2. *Para o número $b = 2021$, como $S(b) = \frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}_+$ não é possível obter um número equilibrado da forma $10 \cdot b + s$.*

Proposição 4 *Dado o número equilibrado $c^{(i)} = a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0$ com $k+1$ algarismos e $k \leq i \leq 0$. Então $a = 10 \cdot c + a_i$ e a' são números equilibrados com $k+2$ algarismos.*

Demonstração Sem perda de generalidade considere $c^{(0)}$ um número equilibrado com $k+1$ algarismos, façamos $a = 10 \cdot c + a_0$. Note que $S(c) = (k+1)a_0$, assim

$$M_0(a) = \frac{S(a) - a_0}{k+1} = \frac{S(c)}{k+1} = a_0 \, .$$

Portanto $a^{(0)}$ e a' são números equilibrados.

Exemplo 6 *No Exemplo 1 temos que o número $c^{(1)} = 456$ com 3 algarimos é equilibrado, assim $a^{(0)} = 4565$ e toda permutação a' são números equilibrados com 4 algarismos.*

3 | EXEMPLOS DE NÚMERO EQUILIBRADO

Segue da Definição 1 que nenhum número com 1 algarismo é um número equilibrado. E da Proposição 4 concluímos que existe *número equilibrado* para qualquer quantidade $k > 1$ de algarismos. Usaremos a Proposição 3 para apresentar alguns números equilibrados de 2, 3 , 4 ou 5 algarismos.

3.1 | Número equilibrado com 2 algarismos

Veja que apenas os número $a = xx$ com algarismos repetidos é um número equilibrado, visto que devemos ter $x = \frac{x}{1}$ com $0 \neq x \in D$. Donde obtemos que exitem 9 números equilibrados com 2 algarismos.

3.2 | Número equilibrado com 3 algarismos

Neste e no próximo caso, consideremos, sem perda de generalidade, que $a = a^{(0)}$ é *número equilibrado* com $k + 1$ algarismos. Como a é equilibrado devemos ter

$$a_0 = M_0(a) = \frac{S(a) - a_0}{k} .$$

Assim, dado $a = a_2a_1a_0$ um *número equilibrado* com 3 algarismos, temos $k = 2$ e $S(a) = 3a_0$, ou seja, $S(a)$ é múltiplo de 3 e $1 \leq M_0(a) \leq 9$. Denotemos por $\overline{M_{a_0}(a)}$ o numerador da fração $M_0(a)$.

1. Se $a_0 = 1$ então $S(a) = 3$ e $\overline{M_1(a)} = 2$, e a soma 2 pode ser obtida por $2 + 0$ ou $1 + 1$, donde obtemos que $a = 201$ ou $a = 111$. Uma vez que as permutações de tais números também são números equilibrados, temos no total $5 = 4 + 1$ números equilibrados obtidos a partir de 201 e 111, a saber, 201, 102, 210, 120 e 111.
2. Se $a_0 = 2$ então $S(a) = 6$, $\overline{M_2(a)} = 4$ e a soma 4 pode ser obtida por $4 + 0 = 3 + 1 = 2 + 2$. Portanto $a = 402$, $a = 312$ ou $a = 222$, totalizando $11 = 4 + 6 + 1$ números equilibrados.
3. Se $a_0 = 3$ então $S(a) = 9$ e

$$\overline{M_3(a)} = 6 = 6 + 0 = 5 + 1 = 4 + 2 = 3 + 3 ,$$

   Donde $a = 603$, $a = 513$, $a = 423$ ou $a = 333$, obtendo $17 = 4 + 6 + 6 + 1$ números equilibrados.
4. Se $a_0 = 4$ então $S(a) = 12$ e

$$\overline{M_4(a)} = 8 = 8 + 0 = 7 + 1 = 6 + 2 = 5 + 3 = 4 + 4 ,$$

   Donde $a = 804$, $a = 714$, $a = 624$, $a = 534$ ou $a = 444$, resultando em $23 = 4 + 6 + 6 + 6 + 1$ números equilibrados.
5. Se $a_0 = 5$ então $S(a) = 15$ e

$$\overline{M_5(a)} = 10 = 9 + 1 = 8 + 2 = 7 + 3 = 6 + 4 = 5 + 5 ,$$

   Portanto $a = 915$, $a = 825$, $a = 735$, $a = 645$ ou $a = 555$, totalizando $25 = 4 \cdot 3! + 1$ números equilibrados.
6. Se $a_0 = 6$ então $S(a) = 18$ e

$$\overline{M_6(a)} = 12 = 9 + 3 = 8 + 4 = 7 + 5 = 6 + 6 ,$$

   Assim $a = 936$, $a = 846$, $a = 756$ ou $a = 666$, obtendo $19 = 3 \cdot 3! + 1$ números equilibrados.
7. Se $a_0 = 7$ então $S(a) = 21$ e

$$\overline{M_7(a)} = 14 = 9 + 5 = 8 + 6 = 7 + 7 ,$$

   Assim $a = 957$, $a = 867$ ou $a = 777$, resultando em $13 = 2 \cdot 3! + 1$ números equilibrados.
8. Se $a_0 = 8$ então $S(a) = 24$ e $\overline{M_8(a)} = 16 = 9 + 7 = 8 + 8$. Logo, $a = 978$ ou $a = 888$; no qual, obtém-se um total de $7 = 6 + 1$ números equilibrados.
9. Se $a_0 = 9$ então $S(a) = 27$ e $\overline{M_9(a)} = 18 = 9 + 9$, assim $a = 999$ é equilibrado.

No Banco de Questões da OBMEP 2008 pede-se

Problema 1 *[1, 2008] Quantos números equilibrados existem com 3 algarismos?*

Pela (construção e) listagem anterior é possível concluir que exitem 121 números equilibrados com 3 algarismos. Veja outra resolução desta questão em [2].

3.3 | Número equilibrado com 4 algarismos

Análogo ao caso anterior, seja $a^{(0)} = a_3a_2a_1a_0$ um número equilibrado com 4 algarismos, assim $k = 3$, $S(a) = 4a_0$ é múltiplo de 4 e $1 \leq M_0(a) \leq 9$.

1. Se $a_0 = 1$ então $S(a) = 4$, $\overline{M_1(a)} = 3 = 3+0+0 = 2+1+0 = 1+1+1$, donde obtemos que $a = 3001$, $a = 2101$ ou $a = 1111$, e suas permutações, totalizando $16 = 6+9+1$ números equilibrados.
2. Se $a_0 = 2$ então $S(a) = 8$, assim

$$\begin{aligned}\overline{M_2(a)} &= 6 = 6+0+0 = 5+1+0 = 4+2+0\\ &= 4+1+1 = 3+3+0 = 3+2+1 = 2+2+2\,,\end{aligned}$$

   Portanto $a = 6002$, $a = 5102$, $a = 4202$, $a = 4112$, $a = 3302$, $a = 3212$ ou $a = 2222$, e um total de $67 = 6+18+9+12+9+12+1$ números equilibrados.
3. Se $a_0 = 3$ então $S(a) = 12$, assim

$$\begin{aligned}\overline{M_3(a)} &= 9 = 9+0+0 = 8+1+0 = 7+2+0 = 7+1+1\\ &= 6+3+0 = 6+2+1 = 5+4+0 = 5+3+1\\ &= 5+2+2 = 4+4+1 = 3+3+3\,,\end{aligned}$$

   Logo $a = 9003$, $a = 8103$, $a = 7203$, $a = 7113$, $a = 6303$, $a = 6213$, $a = 5403$, $a = 5313$, $a = 5223$, $a = 4413$, 4323 ou $a = 3333$, donde obtemos $154 = 6+18+18+12+9+24+18+12+12+12+12+1$ números equilibrados.
4. Se $a_0 = 4$ então $S(a) = 16$, assim

$$\begin{aligned}\overline{M_4(a)} &= 12 = 9+3+0 = 9+2+1 = 8+4+0 = 8+3+1\\ &= 8+2+2 = 7+5+0 = 7+4+1 = 7+3+2 = 6+6+0\\ &= 6+5+1 = 6+4+2 = 6+3+3 = 4+4+4\,,\end{aligned}$$

   Logo $a = 9304$, $a = 9214$, $a = 8404$, $a = 8314$, $a = 8224$, $a = 7504$, $a = 7414$, $a = 7324$, $a = 6604$, $a = 6514$, $a = 6424$, $a = 6334$, $a = 5524$, $a = 5434$ ou $a = 4444$, obtendo $223 = 18+24+9+24+12+18+12+24+9+24+12+12+12+12+1$ números equilibrados.
5. Se $a_0 = 5$ então $S(a) = 20$, assim

$$\begin{aligned}\overline{M_5(a)} &= 15 = 9+6+0 = 9+5+1 = 9+4+2 = 9+3+3\\ &= 8+7+0 = 8+6+1 = 8+5+2 = 8+4+3 = 5+5+5\,,\end{aligned}$$

Portanto $a = 9605$, $a = 9515$, $a = 9425$, $a = 9335$, $a = 8705$, $a = 8615$, $a = 8525$, $a = 8435$, , $a = 7715$, $a = 7625$, $a = 7535$, $a = 7446$, $a = 6635$, $a = 6545$ ou $a = 555$ e totalizando $229 = 18+12+24+12+18+24+12+24+12+12+12+1$ números equilibrados.

6. Se $a_0 = 6$ então $S(a) = 24$, assim

$$\begin{aligned}\overline{M_6(a)} &= 18 = 9+9+0 = 9+8+1 = 9+7+2 = 9+6+3\\ &= 9+5+4 = 8+8+2 = 8+7+3 = 8+6+4 = 8+5+5\\ &= 7+7+4 = 7+6+5 = 6+6+6\,,\end{aligned}$$

Portanto $a = 9906$, $a = 9816$, $a = 9726$, $a = 9636$, $a = 9546$, $a = 8826$, $a = 8736$, $a = 8646$, $a = 8556$, $a = 7346$, $a = 7656$, ou $a = 6666$, e obtemos $178 = 9+24+24+12+24+12+24+12+12+12+12+1$ números equilibrados.

7. Se $a_0 = 7$ então $S(a) = 28$, assim

$$\begin{aligned}\overline{M_7(a)} &= 21 = 9+9+3 = 9+8+4 = 9+7+5 = 9+6+6\\ &= 8+8+5 = 8+7+6 = 7+7+7\,.\end{aligned}$$

Logo $a = 9937$, $a = 9847$, $a = 9757$, $a = 9667$, $a = 8857$, $a = 8767$ ou $a = 7777$, e um total de $85 = 12+24+12+12+12+12+1$ números equilibrados.

8. Se $a_0 = 8$ então $S(a) = 32$ e $\overline{M_8(a)} = 24 = 9+9+6 = 9+8+7 = 8+8+8$. Logo $a = 9968$, $a = 9878$ ou $a = 8888$; de onde, obtém-se um total de $25 = 12+12+1$ números equilibrados, para tal caso.

9. Se $a_0 = 9$ então $S(a) = 36$, assim $\overline{M_9(a)} = 27 = 9+9+9$, e $a = 9999$ é o número equilibrado.

Portanto exitem 978 números equilibrados com 4 algarismos. Além disso, com a listagem acima é possível que você revolva a seguinte questão do Banco de Questões da OBMEP 2014.

Problema 2 *[1, 2014] (a) Encontre os três menores números equilibrados com 4 algarismos.*
(b) Quantos são os números equilibrados, com 4 algarismos, menores que 2014?

3.4 | Número equilibrado com 5 algarismos

Análogo aos casos anteriores, seja $a^{(0)} = a_4a_3a_2a_1a_0$ um número equilibrado com 5 algarismos, assim $k = 4$, $\overline{M_{a_0}(a)} = 4a_0$ e $1 \leq M_0(a) \leq 9$. Na Tabela (1), apresentamos, a menos de permutação dos algarismos, os números equilibrados com 5 algarismos, obtendo 8815 números equilibrados.

4 | CONSIDERAÇÕES

Motivados pelos Problemas 1 e 2 apresentados nos Banco de Questões da OBMEP, escrevemos estas notas. Uma primeira indagação que tivemos foi sobre a existência de *número equilibrado* com qualquer quantidade $k > 1$ de algarismos, que obtemos resposta afirmativa (Proposições 3 e 4). Outra indagação ainda não resolvida é

Problema 3 *Para todo $k > 1$, quantos números equilibrados existem com k algarismos?*

TABELA 1 Exemplos de número equilibrado com 5 algarismos

a_0	$\overline{M_i(a)} = 4a_0$	número equilibrado (suas permutações)
1	4	40001 , 31001 , 22001 e 11111
2	8	80002 , 71002 , 62002 , 61102 , 53002 , 52102 , 51112 , 44002 ,
		43102 , 42202 , 42112 , 33202 , 33112 , 32212 e 22222
3	12	93003 , 92103 , 91113 , 84003 , 83103 , 82203 , 82113 ,
		75003 , 74103 , 73203 , 73113 , 72213, 66003 , 65103 ,
		64203 , 64113 , 63303 , 63213 , 62223 , 55203 , 55113 , 54303 ,
		54213, 53313 , 53223 , 44403 , 44313 , 44223 e 33333
4	16	97004 , 96104 , 95204 , 95114 , 94304 , 94214 , 93314 ,
		93224 , 88004 , 87104 , 86204 , 86114 , 85304 , 85214 ,
		84404 , 84314 , 84224 , 83324 , 77204 , 77114 , 76304 ,
		76214 , 75404 , 75314 , 75224 , 74414 , 73334 , 66404 ,
		66314 , 66224 , 65504, 65414 , 65324 , 64424 , 64334 ,
		55514 , 55424 , 55334 , 54434 e 44444
5	20	99205 , 99115 , 98305 , 98215 , 97405 , 97315 , 97225 ,
		96505 , 96415 , 96325 , 95515 , 95425 , 95335 , 94435 ,
		88405 , 88315 , 88225 , 87505 , 87415 , 87325 , 86605 ,
		86515 , 86425 , 86335 , 85525 , 85435 , 84445 , 77605 ,
		77515 , 77425 , 77335 , 76615 , 76525 , 76435 , 75535 ,
		75445 , 66625 , 66535 , 66445 , 65545 e 55555
6	24	99606 , 99516 , 99426 , 99336 , 98706 , 98616 , 98526 ,
		98436 , 97716 , 97626 , 97536 , 97446 , 96636 , 96546 ,
		95556 , 88806 , 88716 , 88626 , 88536 , 88446 , 87726 ,
		87636 , 87546 , 86646 , 86556 , 77736 , 77646 , 77556 e 66666
7	28	99917 , 99827 , 99737 , 99647 , 98837 , 98747 , 98657 ,
		97757 , 97667 , 88847 , 88757 , 88667 e 77777
8	32	99958 , 99868 , 99778 , 98838 , 98748 , 98657 e 88888
9	36	99999

Referências

[1] BRASIL-OBMEP. *Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas*. Banco de Questões 2008, 2010 e 2014. SBM : IMPA. <www.obmep.org.br>

[2] CARVALHO, Fernando S.; COSTA, Eudes A. *Permutando algarismos dos números*. SBM-Eureka!, v. 39, p. 27-36, 2015.

[3] SILVA, Valdir V. *Números: Construção e Propriedades*. Editora UFG. Goiânia. 2003.