Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 8, junho de 2013, 4-24

Soluções Comentadas das Provas da XXI OMEG - 2012

Rogerio de Queiroz Chaves, Helvecio Pereira de Castro,
Durval José Tonon e Valdivino Vargas Junior

Resumo. Apresentamos, a seguir, uma resolução comentada das questões da OMEG de 2012, em que procuramos incorporar, tanto quanto possível, ideias e argumentos apresentados pelos estudantes participantes da OMEG em suas provas, mencionando seus nomes. Para alguns dos problemas, são apresentados comentários adicionais que podem esclarecer e expandir o contexto do problema original, bem como apresentar possibilidades de generalização e propor outros problemas relacionados. Recomendamos que, antes de ler as soluções, o leitor encare o desafio de resolver os problemas por sua conta e desfrute da sensação de conquista e de amadurecimento que esta atividade pode proporcionar. Por isso apresentamos, inicialmente, apenas o texto dos problemas, com as resoluções seguindo-os em separado.

1.1 Provas da XXI OMEG

Nível 1

1. Brincando com suas bolinhas de gude, Lucas notou um fato curioso: agrupando-as três a três sobraram duas bolinhas; agrupando-as quatro a quatro, também sobraram duas e o mesmo aconteceu quando ele as agrupou cinco a cinco e seis a seis.

(a) Se o número de bolinhas não chega a 100, quantas bolinhas Lucas possui?

(b) De todos os números que tem a propriedade descrita no enunciado, ou seja, suas divisões por 3, 4, 5 e 6 deixam resto 2, qual é o que fica mais próximo de 2012?

2. Chamemos de "partição em uns" de um número sua decomposição no menor número possível de parcelas que só tenham o dígito 1. Por exemplo $30 = 11 + 11 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2 \cdot 11 + 8 \cdot 1$ é a partição em uns do número 30 e possui dez parcelas.

(a) Qual é a partição em uns de 2012?

(b) Dentre os números menores que 2012 determine aquele cuja partição em uns tem o maior número de parcelas.

3. Um experimento com peixes envolve cinco tanques, numerados de 1 a 5, contendo, inicialmente, as quantidades de peixes descritas na tabela abaixo.

Tanque	1	2	3	4	5
Número de Peixes	100	200	300	400	500

Uma vez por dia os seguintes passos são realizados:

- um peixe é retirado do tanque 1 e colocado no tanque 2;
- dois peixes são retirados do tanque 2 e colocados no tanque 3;
- três peixes são retirados do tanque 3 e colocados no tanque 4;
- quatro peixes são retirados do tanque 4 e colocados no tanque 5;

Se algum dos tanques não tiver mais peixes, o passo correspondente é ignorado e passa-se ao passo seguinte.

(a) Quantos dias são necessários para que todos os peixes estejam no tanque 5?

(b) Quantos peixes estarão no tanque 2 ao final do 149º dia?

(c) Quantos peixes haverá em cada tanque ao final do 172º dia?

4. De uma folha quadrada de papel serão recortados cartões retangulares de $7\,\text{cm} \times 3\,\text{cm}$. Determine qual é o número máximo de cartões que se pode obter se as medidas da folha de papel forem

(a) 13 cm×13 cm

(b) 130 cm×130 cm

5. Em um certo carro de passeio com tração dianteira os pneus dianteiros gastam-se mais rapidamente que os traseiros de modo que, se não for feito um rodízio dos pneus, os que rodam na dianteira duram 40.000 km, enquanto que os traseiros duram 50.000 km. Uma estratégia que pode ser usada para que os quatro pneus terminem sua vida útil ao mesmo tempo é o rodízio, que consiste de passar os pneus traseiros para a frente e os dianteiros para a traseira depois de terem rodado por algum tempo.

Começando com quatro pneus novos, se o rodízio for feito apenas uma vez, com qual quilometragem ele deve ser feito para que todos os pneus terminem sua vida útil ao mesmo tempo?

6. O maior círculo que se pode desenhar dentro de um quadrado passa pelos pontos médios dos lados do quadrado e ocupa, aproximadamente, 78,5% da área do quadrado.

O maior quadrado que se pode desenhar dentro de um círculo tem seus quatro vértices sobre o contorno do círculo. Neste caso, quanto da área do círculo é ocupada pelo quadrado?

Nível 2

1. Brincando com suas bolinhas de gude, Lucas notou um fato curioso: agrupando-as duas a duas sobrou uma bolinha, agrupando-as três a três sobraram duas; quatro a quatro, sobraram três; cinco a cinco sobraram quatro e seis a seis sobraram cinco.

(a) Se o número de bolinhas não chega a 100, quantas bolinhas Lucas possui?

(b) De todos os números que tem a propriedade descrita no enunciado, ou seja, suas divisões por 2, 3, 4, 5 e 6 deixam resto 1, 2, 3, 4 e 5, respectivamente, qual é o que fica mais próximo de 2012?

2. Chamemos de "partição em uns" de um número sua decomposição no menor número possível de parcelas que só tenham o dígito 1. Por

exemplo $30 = 11 + 11 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2 \cdot 11 + 8 \cdot 1$ é a partição em uns do número 30 e possui dez parcelas.

(a) Qual é a partição em uns de 2012?

(b) Dentre os números menores que 2012 determine aquele cuja partição em uns tem o maior número de parcelas.

3. Um experimento com peixes envolve cinco tanques, numerados de 1 a 5, contendo, inicialmente, as quantidades de peixes descritas na tabela abaixo.

Tanque	1	2	3	4	5
Número de Peixes	100	200	300	400	500

Uma vez por dia os seguintes passos são realizados:

- um peixe é retirado do tanque 1 e colocado no tanque 2;
- dois peixes são retirados do tanque 2 e colocados no tanque 3;
- três peixes são retirados do tanque 3 e colocados no tanque 4;
- quatro peixes são retirados do tanque 4 e colocados no tanque 5;

Se algum dos tanques não tiver mais peixes, o passo correspondente é ignorado e passa-se ao passo seguinte.

(a) Quantos dias são necessários para que todos os peixes estejam no tanque 5?

(b) Quantos peixes estarão no tanque 2 ao final do 149º dia?

(c) Quantos peixes haverá em cada tanque ao final do 172º dia?

4. O maior círculo que se pode desenhar dentro de um quadrado passa pelos pontos médios dos lados do quadrado e ocupa, aproximadamente, 78,5% da área do quadrado. O maior quadrado que se pode desenhar dentro de um círculo tem seus quatro vértices sobre o contorno do círculo. Quanto da área do círculo é ocupada por esse quadrado?

5. Usualmente o perímetro e áarea de um retângulo são calculados conhecendo-se as medidas dos lados. Entretanto, a recíproca desse fato também é verdadeira, isto é, as medidas dos lados de um retângulo podem ser determinadas conhecendo-se seu perímetro e sua área, embora nem sempre exista um retângulo cujo perímetro e área sejam dois números dados arbitrariamente.

a) Determine os lados de um retângulo com perímetro medindo 30 cm e área medindo 56 cm^2;

b) Determine que relação dois números, A e P, precisam satisfazer para que exista um retângulo com área A e perímetro P.

6. De uma folha quadrada de papel serão recortados cartões retangulares de $7\,\text{cm}\times 3\,\text{cm}$. Determine qual é o número máximo de cartões que se pode obter se as medidas da folha de papel forem

(a) $13\,\text{cm}\times 13\,\text{cm}$

(b) $130\,\text{cm}\times 130\,\text{cm}$

(c) $30\,\text{cm}\times 30\,\text{cm}$

Nível 3

1. Chamemos de "partição em uns" de um número sua decomposição no menor número possível de parcelas que só tenham o dígito 1. Por exemplo $30 = 11 + 11 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2\cdot 11 + 8\cdot 1$ é a partição em uns do número 30 e possui dez parcelas.

(a) Qual é a partição em uns de 2012?

(b) Dentre os números menores que 2012 determine aquele cuja partição em uns tem o maior número de parcelas.

2. Um experimento com peixes envolve cinco tanques, numerados de 1 a 5, contendo, inicialmente, as quantidades de peixes descritas na tabela abaixo.

Tanque	1	2	3	4	5
Número de Peixes	100	200	300	400	500

Uma vez por dia os seguintes passos são realizados:

- um peixe é retirado do tanque 1 e colocado no tanque 2;
- dois peixes são retirados do tanque 2 e colocados no tanque 3;
- três peixes são retirados do tanque 3 e colocados no tanque 4;
- quatro peixes são retirados do tanque 4 e colocados no tanque 5;

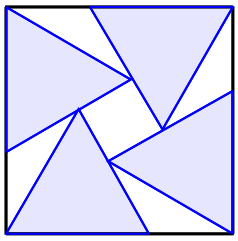
Se algum dos tanques não tiver mais peixes, o passo correspondente é ignorado e passa-se ao passo seguinte.

(a) Quantos dias são necessários para que todos os peixes estejam no tanque 5?

(b) Quantos peixes estarão no tanque 2 ao final do 149º dia?

(c) Quantos peixes haverá em cada tanque ao final do 172º dia?

3. Um tetraedro foi construído tendo como faces quatro triângulos equiláteros recortados de um quadrado com área de $1\,\mathrm{m}^2$ como indicado na figura abaixo.



Calcule o volume do tetraedro.

4. Duas pessoas jogam "par ou ímpar" da seguinte forma: um dos jogadores escolhe a opção "par" e o outro "ímpar". Então, num mesmo instante, cada jogador apresenta, com os dedos, um número de um a cinco. Se o total de dedos mostrados for par, ganha o jogador que escolheu "par", caso contrário o outro jogador ganha.

(a) Se os dois jogadores escolherem os números que vão jogar de maneira aleatória, com qualquer um dos cinco números tendo a mesma probabilidade de ser escolhido, qual dos dois tem maior chance de ganhar?

(b) Se o jogador que escolheu "par" assumir que o outro jogará aleatoriamente, que estratégia pode adotar para maximizar suas chances de ganhar?

(c) Se ambos os jogadores pensarem como no item **(b)**, ou seja, assumirem que o oponente jogará aleatoriamente e adotarem esse tipo de estratégia para tentar aumentar suas chances, qual dos dois ganha?

5. Apenas conhecendo-se o perímetro e a área de um triângulo não se pode determinar, de maneira única, as medidas do mesmo. Em geral, um triângulo qualquer(não equilátero) pode ser "deformado" continuamente de modo a se obter uma infinidade de triângulos não congruentes, todos tendo perímetro e área iguais aos do triângulo inicial.

(a) Considere o triângulo isósceles com base medindo 14 cm e os outros dois lados medindo 10 cm cada um. Determine os lados de outro triângulo isósceles (não congruente com esse) que tenha mesmo perímetro e mesma área que esse.

(b) Existe algum par de valores de área e perímetro para os quais é possível obter três triângulos isósceles, dois a dois não congruentes, com mesma área e perímetro?

6. De uma folha quadrada de papel serão recortados cartões retangulares de $7\,\text{cm}\times 3\,\text{cm}$. Determine qual é o número máximo de cartões que se pode obter se as medidas da folha de papel forem

(a) $13\,\text{cm}\times 13\,\text{cm}$

(b) $130\,\text{cm}\times 130\,\text{cm}$

(c) $65\,\text{cm}\times 65\,\text{cm}$ (DICA: verifique que qualquer retângulo no formato $21\times n$ com $n \geq 12$ pode ser coberto de maneira exata, ou seja, sem sobra nem falta, por retângulos 7×3.)

1.2 Resolução comentada

Nível 1

1. *Brincando com suas bolinhas de gude, Lucas notou um fato curioso...* (baseado nas soluções apresentadas por *Abner Eduardo Silveira Santos*, *Karoline Lemes Faria*, *Matheus Laureano Nunes Barbosa* e *Vicente Romeiro de Moraes*)

(a) Como sempre sobram duas bolinhas nas divisões mencionadas no enunciado, se duas bolinhas forem retiradas do total, o número de bolinhas restantes deve ser divisível por 3, 4, 5 e 6, cujo menor múltiplo comum é 60. Assim o total de bolinhas tem que ser um múltiplo de 60 mais as duas bolinhas retiradas. Se o número não chega a 100, só pode ser 62.

(b) Dividindo 2012 por 60, obtemos $2012 = 33 \cdot 60 + 32 = 1980 + 32$, como 1980 é múltiplo de 60, 1982 tem a propriedade descrita no enunciado. O próximo número com esta propriedade é 1982+60=2042 e tanto um quanto o outro ficam a 30 unidades de 2012.

Observação: Outros alunos que tiveram nota máxima nesse problema (*Carolina Soares Lôbo*, *Laís Ribeiro Torres* e *Lucas Gonçalves de Oliveira*) argumentaram com base em critérios de divisibilidade de números inteiros. O algarismo de unidade do número de bolinhas (depois de retiradas duas) deve ser 0 ou 5, por esse número ser divisível por 5. Por outro lado, como é divisível por 4 então ele é par, e deve terminar em um algarismo par. Assim concluem que esse número termina em 0, isto é, corresponde a um número inteiro de dezenas. Além disso esse número de dezenas deve ser divisível por 2 e por 3. Portanto, 6 dezenas mais 2 unidades (62) é a resposta do item (a) e para o item (b) a resposta é obtida por exclusão de dezenas a partir de 2012 utilizando o critério de divisibilidade por 3.

2. *Chamemos de "partição em uns" de um número sua decomposição no menor número possível de parcelas que só tenham o dígito 1...* (baseado nas soluções apresentadas por *Abner Eduardo Silveira Santos* e *Gabriel Neil Cruvinel*)

(a) Para decompor no menor número de parcelas, devemos utilizar as maiores parcelas possíveis. Como 1111 cabe uma vez em 2012, obtemos $2012 - 1111 = 901$. Retirando agora oito parcelas de 111, temos $901 - 888 = 13 = 11 + 1 + 1$. Assim, $2012 = 1111 + 8 \times 111 + 11 + 1 + 1$, com 12 parcelas

(b) Note que na partição em uns, se houver 11 parcelas de um mesmo tipo, elas podem ser substituídas por parcelas maiores. Além, disso, com dez parcelas de um mesmo tipo, não pode haver parcelas ainda menores, pois basta somar 1 às dez parcelas, para se obter uma parcela com uns maior que as anteriores. Desta forma, o maior número de parcelas pode ser obtido tomando-se $10 \times 1 + 9 \times 11 + 9 \times 111 = 1108$, com 28 parcelas.

Observação: Na resolução do item (b), não aparecem todos os elementos que poderiam estar presentes caso a cota 2012 fosse substituída por outro número maior, de forma que análise a seguir indica, de maneira mais completa, como a solução pode ser generalizada.

Dentre os números menores que 2012 aqueles que são menores que 1111 serão decompostos em parcelas de 1, 11 e 111. Dentre eles a quantidade máxima de parcelas é obtida com o número $n = 9 \times 111 + 9 \times 11 + 10 \times 1 = 1108$, totalizando 28 parcelas. Para números entre 1111 e 2012 a "partição em um´s" teria necessariamente o 1111 e o resto r, que é menor que 901 (diferença entre 2012 e 1111) seria também "particionado" em parcelas de 1, 11 e 111. Se houvesse algum deles com 28 ou mais parcelas, forçosamente o resto r seria "particionado" em 27 ou mais parcelas. Porém o **menor** número que pode ser "particionado" em 27 parcelas (de 1, 11 e 111) é $8 \times 111 + 9 \times 11 + 10 = 997$ (subtração da maior parcela, 111). Como r é menor que 997(pois é menor que 901), então a quantidade de parcelas dele é menor que 27, e assim todo número maior que 1111 (e, claro, menor que 2012) tem menos de 28 parcelas, sendo portanto 1108 o número com maior quantidade de parcelas.

Essas considerações são necessárias, pois podem existir várias soluções para o problema, dependendo da cota fixada. Por exemplo: Para números menores que 3330 existem **quatro** soluções: **2219** ($= 1\times1111+9\times111+9\times11+10\times1$); **3219** ($= 2\times1111+8\times111+9\times11+10\times1$); **3319** ($= 2\times1111+9\times111+8\times11+10\times1$) e **3329** ($2\times1111+9\times111+9\times11+9\times1$). Todas com 29 parcelas.

---

3. *Um experimento com peixes envolve cinco tanques...*

Ver resolução do **problema 3** do **nível 2**.

---

4. *De uma folha quadrada de papel serão recortados cartões retangulares de 7 cm×3 cm...*

Ver resolução dos itens **(a)** e **(b)** do **problema 6** do **nível 3**.

---

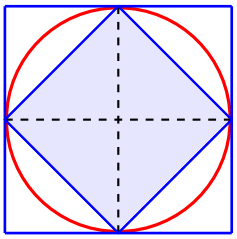
5. *Em um certo carro de passeio com tração dianteira os pneus dianteiros gastam-se mais rapidamente...*

Ver resolução do **problema 5** do **nível 2**.

---

6. *O maior círculo que se pode desenhar dentro de um quadrado...* (baseado nas solução apresentada por *Gabriel Neil Cruvinel*)

Desenhando um quadrado menor dentro do círculo inscrito no quadrado maior, não é difícil verificar que a área do quadrado menor é metade da área do maior. Basta desenhar o quadrado menor de maneira que seus vértices fiquem nos pontos médios do quadrado maior, como na figura abaixo.



Denotando por q a área do quadrado menor, Q a área do maior e c a área do círculo temos, então, aproximadamente, $c = 0{,}785\,Q$ e $Q = 2q$, de onde obtemos

$$c = 1{,}57\,q \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{c} = \frac{1}{1{,}57} \approx 0{,}637, \text{ ou seja, } 63,7\%.$$

Nível 2

1. *Brincando com suas bolinhas de gude, Lucas notou um fato curioso...* (baseado nas soluções apresentadas por *Arthur Santana Silva*, *Thiago Lucas Faustino da Silva* e *Artur Pimpão de Paula*. Veja também as soluções e comentários para o problema 1 do nível 1)

(a) Como sempre sobra uma bolinha a menos que o dividendo nas divisões mencionadas no enunciado, se uma bolinha for acrescentada ao total, o número de bolinhas resultante deve ser divisível por 2, 3, 4, 5 e 6, cujo menor múltiplo comum é 60, isto é, o número x com essa propriedade é tal que $x - 1$ é divisível por 2, 3, 4, 5 e 6. Logo o número de bolinhas é do tipo $60n - 1$ onde n é um inteiro positivo. Como, pelas condições do problema esse número não chega a 100, concluímos que é 59.

(b) Analogamente ao item anterior, estamos interessados em encontrar o número x mais próximo de 2012 tal que $x-1$ seja divisível por 2, 3, 4, 5, e 6. Dividindo 2012 por 60, obtemos $2012 = 33 \cdot 60 + 32 = 1980 + 32$, como 1980 é múltiplo de 60, 1979 tem a propriedade descrita no enunciado. O próximo número com esta propriedade é $1979 + 60 = 2039$, sendo este o mais próximo de 2012.

---

2. *Chamemos de "partição em uns" de um número sua decomposição no menor número possível de parcelas que só tenham o dígito 1...*

Ver resolução do **problema 2** do **nível 1**.

---

3. *Um experimento com peixes envolve cinco tanques...* (baseado nas soluções apresentadas por *Arthur Santana Silva*, *Matheus Uchôa Constante* e *Maria Chaer de Souza Cruvinel*)

Inicialmente cada tanque, exceto o 5, perde um peixe por dia. O tanque 5 ganha 4 peixes por dia. Após 100 dias, o tanque 1 está vazio e o tanque 2 está com 100 peixes. A partir daí este último perde 2 peixes por dia e estará vazio em 50 dias. Assim, após 150 dias os tanques 1 e 2 estão vazios e o tanque 3 tem 150 peixes. A partir daí, o tanque 3 perde 3 peixes por dia, esvaziando-se em 50 dias. Pode-se então construir a seguinte tabela com os números de peixes ao final de alguns períodos chave:

Tanque	1	2	3	4	5
100 dias	0	100	200	300	900
150 dias	0	0	150	250	1100
200 dias	0	0	0	200	1300
250 dias	0	0	0	0	1500

(a) A partir dos números obtidos acima, conclui-se que são necessários 250 dias para que todos os peixes estejam no tanque 5.

(b) No 150º dia os dois últimos peixes do tanque 2 são retirados, então, ao final do 149º dia, dois peixes estarão no tanque 2.

(c) Ao final de 150 dias, os tanques 1 e 2 não possuem mais peixes, o tanque 3 possui 150 e no tanque 4 restam 250. Nos próximos 22 dias, 66 são retirados do tanque 3, restando 87, e o número de peixes no tanque 4 decresce em 22, passando a 228. Os demais peixes estarão no tanque 5, ou seja $1500 - 228 - 87 = 1185$.

---

4. *De uma folha quadrada de papel serão recortados cartões retangulares de 7 cm×3 cm...*

Ver resolução dos itens **(a)** e **(b)** do **problema 6** do **nível 3**.

---

5. *Em um certo carro de passeio com tração dianteira os pneus dianteiros gastam-se mais rapidamente...* (Resolução proposta pela equipe da OMEG)

A ideia central aqui é que a fração consumida de cada pneu é proporcional à distância rodada, sendo que a vida útil do pneu, em quilômetros, muda, dependendo de o pneu rodar na dianteira ou na traseira Após rodar x milhares de quilômetros, os pneus dianteiros terão gasto $x/40$ de sua vida útil e os traseiros $x/50$ (Por exemplo, rodando 20.000 km, consome-se metade da vida útil dos pneus dianteiros e $2/5$ dos traseiros). Restarão então

$$1 - \frac{x}{40} = \frac{40 - x}{40}$$

dos pneus dianteiros e

$$1 - \frac{x}{50} = \frac{50 - x}{50}$$

dos traseiros. Realizando o rodízio neste momento, os pneus que eram traseiros e foram passados para a frente podem rodar $(50 - x)/50$ de 40.000 km e os que eram dianteiros e foram passados para trás podem rodar $(40 - x)/40$ de 50.000 km. Para que os pneus se acabem ao mesmo tempo, estas duas quilometragens tem que ser iguais, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{50 - x}{50} \times 40.000 \ &= \ \frac{40 - x}{40} \times 50.000 \\ \Rightarrow \ (50 - x) \times 16 \ &= \ (40 - x) \times 25 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{200}{9}\,. \end{aligned}$$

Logo, deve-se realizar o rodízio após rodar, aproximadamente, 22.222 km.

---

6. *Usualmente o perímetro e a área de um retângulo são calculados conhecendo-se as medidas dos lados...* (baseado nas soluções apresentadas por *Pedro Antônio Gonçalves dos Santos*, *Thiago Lucas Faustino da Silva* e *João Luís Reis Freitas*)

(a) Denotando por x e y as dimensões do retângulo, é possível formar um sistema de equações através da expressão do perímetro, $2(x + y)$, e da área, xy.

$$\begin{cases} 2x + 2y &= 30 \\ x\,y &= 56 \end{cases}$$

Da primeira equação, obtemos $y = 15 - x$, que substituído na segunda equação leva a $x^2 - 15x + 56 = 0$, que tem as raízes

$x = 7$ e $x = 8$. Escolhendo qualquer um desses valores para x, $y = 15 - x$ será o outro. Portanto o retângulo procurado mede 7×8.

(b) Usando um raciocínio análogo ao do item anterior, consideramos $2x + 2y = P$ e $xy = A$, de onde obtemos $y = \frac{P}{2} - x$, que substituído na outra equação leva a $x^2 - \frac{P}{2}x + A = 0$. Esta equação só tem solução se o discriminante não for negativo, ou seja, se

$$\left(\frac{P}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot A \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{P^2 - 16A}{4} \geq 0$$

Assim, para que exista um retângulo com área A e perímetro P, é necessário que $P^2 \geq 16A$. Caso valha a igualdade, a equação quadrática só tem uma raiz e o retângulo procurado é um quadrado.

Nível 3

1. *Chamemos de "partição em uns" de um número sua decomposição no menor número possível de parcelas que só tenham o dígito 1...*

Ver resolução do **problema 2** do **nível 1**.

---

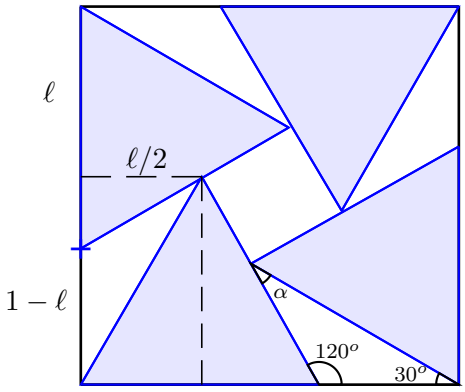
2. *Um experimento com peixes envolve cinco tanques...*

Ver resolução do **problema 3** do **nível 1**.

---

3. *Um tetraedro foi construído tendo como faces quatro triângulos equiláteros recortados de um quadrado...* (baseado nas soluções apresentadas por *André Bergo de Moraes* e *Leonardo de Paula Pinati*)

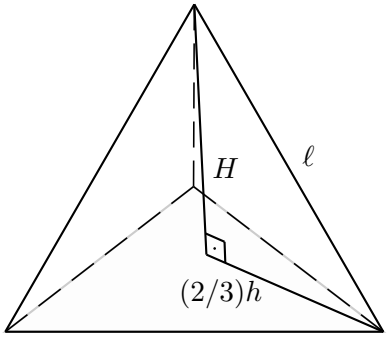
Levando-se em conta que em um triângulo equilátero cada ângulo interno tem 60°, o ângulo indicado por α na figura a seguir só pode ser de 30°. Assim, os quatro triângulos obtusângulos são isósceles.



Denotando por ℓ o lado dos triângulos equiláteros, o lado menor dos triângulos obtusângulos mede $1-\ell$. Assim, do triângulo com um lado tracejado, medindo $\ell/2$ na figura, tem-se

$$\frac{\ell/2}{1-\ell} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell = \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \approx 0,63\,\text{m}.$$

No tetraedro, a altura, H, é a medida do segmento que une um vértice ao centro da face oposta, como indica a figura a seguir. Neste caso, forma-se um triângulo retângulo em que a hipotenusa é uma das arestas do tetraedro, um dos catetos é $2/3$ da altura da base, h, e o outro cateto é a altura do tetraedro.



Por Pitágoras,

$$\ell^2 \;=\; \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2 \;+\; H^2 \;\;\Rightarrow\;\; H^2 \;=\; \frac{2\ell^2}{3} \;\;\Rightarrow\;\; H \;=\; \ell\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Assim, o tetraedro sendo uma pirâmide, seu volume é um terço do produto da área da base pela altura, ou seja,

$$V \;=\; \frac{1}{3}\cdot\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}\cdot\ell\sqrt{\frac{2}{3}} \;=\; \frac{\ell^3\sqrt{2}}{12} \;=\; \left(\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^3\frac{\sqrt{2}}{12}$$

$$=\; \frac{\sqrt{6}}{4(1+\sqrt{3})^3} \;=\; \frac{9\sqrt{2}-5\sqrt{6}}{16} \;\approx\; 0,03\,\mathrm{m}^3.$$

Observações: Este problema, está relacionado a um problema mais difícil e muito interessante que é o seguinte: recortando triângulos de uma chapa quadrada de lado ℓ para construir um tetraedro regular, qual é o maior volume possível para o tetraedro? Para um outro problema interessante relacionado à otimização de cortes de peças em uma chapa, veja o **problema 6**, sobre empacotamentos de retângulos, a seguir.

---

4. *Duas pessoas jogam "par ou ímpar"...* (baseado nas soluções apresentadas por *Leonardo Eurico Marchioro Mendes*, *João Cláudio Neves Simão*, *Marcelo Kuramoto* e *Yuri Luiz Dias Martins*

(a) Se cada jogador tem cinco quantidades diferentes de dedos para apresentar, então pelo Princípio Fundamental da Contagem existem $5.5 = 25$ resultado possíveis. Basta apresentar quantos desses apresentam soma ímpar. São eles (1,2), (1,4), (2,1), (2,3), (2,5), (3,2), (3,4), (4,1), (4,3), (4,5), (5,2) e (5,4). Assim, o jogador que escolheu "ímpar" tem probabilidade $12/25$ de ganhar. E o jogador que escolheu "par" tem probabilidade $1 - 12/25 = 13/25$. Portanto, o jogador que escolheu "par" tem maior chance de ganhar.

(b) Se o outro jogador escolhe aleatoriamente é mais provável que escolha um número ímpar (de 1 a 5 tem-se três números ímpares e dois pares). Assim, a estratégia mais interessante para o jogador que escolheu "par" é apresentar um número ímpar de dedos, para aumentar as chances de o resultado final ser par.

(c) Ambos os jogadores pensam que o outro tem maior probabilidade de apresentar uma quantidade ímpar de dedos. Portanto, o jogador que escolheu "par" apresentará um número ímpar de dedos e o jogador que escolheu "ímpar" apresentará um número par de dedos. Como a soma de um número ímpar com um número par dá resultado ímpar, o jogador que escolheu a opção "ímpar" ganhará.

---

5. *Apenas conhecendo-se o perímetro e a área de um triângulo não se pode determinar, de maneira única, as medidas de seus lados...* (baseado na solução apresentada por *Caio Pereira Dantas*)

(a) O triângulo descrito no enunciado pode ser dividido ao meio em dois triângulos retângulos, com hipotenusa de 14 cm e catetos medindo 5 cm e h (a altura do triângulo). Aplicando o Teorema de Pitágoras a um desses triângulos, tem-se $14^2 = h^2 + 5^2$, donde $h = \sqrt{171}$. Temos, então,

$$\text{Perímetro } = 2p = 14 + 14 + 10 = 38$$

e

$$\text{Área} = \frac{bh}{2} = \frac{10\sqrt{171}}{2} = 5\sqrt{171}.$$

Para obter o outro triângulo isósceles, denotamos sua base por $2y$ e cada um dos lados iguais por x. De modo análogo, a altura, h, desse outro triângulo, é tal que

$$x^2 = y^2 + h^2 \;\Rightarrow\; h^2 = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y).$$

Assim,

$$2x + 2y = 2p = 38 \;\Rightarrow\; x + y = 19$$

e a área do triângulo deve ser

$$5\sqrt{171} = y\sqrt{(x+y)(x-y)} = y\sqrt{19(x-y)} = y\sqrt{19(19-2y)}.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, obtém-se

$$25 \times 171 = y^2 \times 19(19-2y) \;\Rightarrow\; 2y^3 - 19y^2 + 225 = 0.$$

Como já se sabe, do primeiro triângulo, que $y = 5$ é raiz, podemos dividir o polinômio do lado esquerdo por $y - 5$, para obter uma fatoração da equação como $(y-5)(y^2-9y+45) = 0$. Neste caso as outras raízes são 7,5 e -3, sendo que esta última não pode ser lado de um triângulo. Logo, $x = 19 - y = 19 - 7,5 = 11,5$. Portanto, o outro triângulo tem a base medindo 15 cm e os outros dois lados medindo 11,5 cm.

(b) Como visto no item **(a)**, denotando por $2y$ a base do triângulo isósceles e por x a medida dos outros dois lados, tem-se o perímetro $P = 2x + 2y$ e a altura h é tal que $x^2 = y^2 + h^2$, de forma que a área é

$$A = \frac{2yh}{2} = y\sqrt{x^2 - y^2} = y\sqrt{(x+y)(x-y)} = y\sqrt{\frac{P}{2}\left(\frac{P}{2} - 2y\right)}$$

Assim,

$$A^2 = \frac{P^2}{4}y^2 - Py^3 \quad \Rightarrow \quad Py^3 - \frac{P^2}{4}y^2 + A^2 = 0\,,$$

que é a equação a ser satisfeita por y, metade da base de um triângulo isósceles com área A e perímetro P. Note que, pelas relações de Girard, o produto das três raízes y_1, y_2 e y_3 desta equação satisfaz

$$y_1 y_2 y_3 = \frac{-A^2}{P} < 0,$$

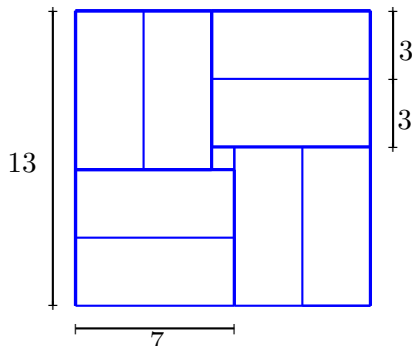
o que implica em um número ímpar de raízes negativas. Por outro lado, para haver três triângulos isósceles distintos, com mesma área e perímetro, as três raízes deveriam ser positivas. Portanto, a resposta à pergunta deste item é negativa.

---

6. *De uma folha quadrada de papel serão recortados cartões retangulares de 7 cm×3 cm...* (baseado nas soluções apresentadas por *Daniel Vandré Barbosa*, *Karoline Lemes Faria*, *Marcelo Kuramoto* e na proposta pela equipe da OMEG)

Antes de resolver cada item, é importante observar que a área de cada cartão é de $7 \cdot 3 = 21\,\text{cm}^2$, então dividindo-se a área da folha quadrada de papel por 21 obtém-se um limitante para o número de cartões retangulares que se pode obter. Entretanto, esse teto não necessariamente é possível de se atingir. Por exemplo, de um quadrado 8×8 só é possível recortar dois retângulos 7×3, embora sobrem $22\,\text{cm}^2$, que é maior que a área de um cartão. E no caso de um quadrado 17×17 cabem, no máximo, doze retângulos 7×3 e sobram $37\,\text{cm}^2$!

(a) Considerando-se que $13 = 7 + 3 + 3$, em cada lateral do quadrado cabe um retângulo no sentido do comprimento e mais dois no sentido da largura. Pode-se, então, arranjar 8 retângulos em 4 pares, cobrindo $7\,\text{cm}\times6\,\text{cm}$ cada um e sobrando, do quadrado 13×13, apenas um quadrado 1×1 (veja a figura).



(b) Observando que $130 = 10 \times 13$, é fácil reproduzir a configuração do item anterior multiplicando todas as medidas por 10, isto é, agrupando 200 retângulos 7×3 (10 no sentido do comprimento por 20 na largura), de modo a formar grandes retângulos com $70\,\text{cm}\times60\,\text{cm}$, que podem ser dispostos de maneira semelhante à do item anterior. Restará o quadrado central, agora com 10×10, de onde podem ser recortados, de maneira análoga, quatro retângulos 7×3, restando ao final apenas um quadrado 4×4. O total de retângulos obtidos, nesse caso, é $4 \times 200 + 4 = 804$. Como a área restante, de $16\,\text{cm}^2$, é menor que os $21\,\text{cm}^2$ de cada retângulo, seria impossível obter um número maior de retângulos (Note que $130^2 = 16900 = 804 \times 21 + 16$).

(c) O número máximo de cartões não pode passar de 201, uma vez que $65^2 = 4225 = 201 \times 21 + 4$.

Tentando a mesma estratégia dos itens anteriores, poderíamos multiplicar por 5 as medidas do item **(a)**, escrevendo $65 = 35 + 30 = 5 \times 7 + 10 \times 3$, de forma que podem ser formados quatro blocos com 50 cartões cada e medindo 35×30. Encaixando-os como no item **(a)** resta um quadrado central com 5 cm de lado. Isso daria $4 \times 50 = 200$ cartões e sobraria $25\,\text{cm}^2$. Como esta sobra é maior que a área de um cartão, podemos tentar outras formas de arranjar os retângulos que aproveitem melhor a área do quadrado maior.

Seguindo a dica dada no enunciado, vamos mostrar que qualquer retângulo da forma $21 \times n$, com $n \geq 12$, pode ser inteiramente coberto por retângulos 7×3, observando que qualquer n é de uma das formas $3k$, $3k + 1$ ou $3k + 2$. Primeiro, colocando lado a lado k dos cartões, ao longo do lado mais comprido, cobre-se um retângulo $7 \times 3k$. Empilhando três destes blocos, cobre-se um retângulo $21 \times 3k$, $k \geq 1$. Justapondo um desses retângulos a outro retângulo 21×7 é fácil cobrir um retângulo de $21 \times (3k + 7) = 21 \times [3(k + 2) + 1]$, que contempla qualquer n, da forma $3k + 1$, maior que 6. Analogamente, justapondo dois retângulos 21×7 a um retângulo $7 \times 3k$ cobre-se um retângulo de $21 \times (3k + 14) = 21 \times [3(k + 4) + 2]$, em que o lado diferente de 21 pode ser qualquer número da forma $3k + 2$ maior que 12, o que completa a demonstração.

Munidos desse resultado, podemos recortar do quadrado 65×65 um retângulo 21×65 (de onde recortam-se exatamente 65 cartões). Do papel restante, medindo 44×65, recortamos outra faixa de 44×21 (44 cartões). Resta, então, um quadrado 44×44, de onde se podem recortar 4 retângulos de 21×23 à maneira do que foi feito no item **(a)**, de onde são obtidos mais 92 cartões e, ao final, restará apenas um quadrado 2×2. Portanto é possível recortar 201 cartões.

Observações: O resultado, mostrado no item **(c)**, de que qualquer retângulo no formato $21 \times n$ com $n \geq 12$ divide-se de maneira exata em retângulos 7×3, pode ser visto como uma consequência do teorema de Sylvester (veja o artigo *Semigrupos Numéricos e o Teorema de Sylvester*, do prof. Ronaldo Garcia, veja a página 49), uma vez que 12 é o

regularizador aritmético do semigrupo gerado por 3 e 7.

Este tipo de problema, conhecido como empacotamento de retângulos, tem importantes aplicações em logística, na otimização da distribuição de caixas e contêineres para transporte ou armazenagem ou na diagramação do corte de peças em chapa metálica, por exemplo. Uma ferramenta (applet java) útil para se estudar empacotamentos de retângulos em um retângulo maior pode ser encontrada em http://lagrange.ime.usp.br/∼lobato/packing/run/index.php, onde se pode entrar com as medidas do retângulo maior ($L \times W$) e dos retângulos menores ($\ell \times w$) e o aplicativo gera empacotamentos máximos seguindo três possíveis algoritmos. Utilizando este applet no caso em que o retângulo maior é um quadrado e os menores são no formato 7×3, é fácil encontrar valores para o lado do quadrado para os quais a área que sobra do empacotamento não pode ser menor que 21. Alguns exemplos são $L = 8, 17, 23$ ou 25).

Um desafio interessante seria responder, nas condições do problema original da OMEG, ou seja, recortando o maior número possível de retângulos 7×3 de um quadrado de lado inteiro L,

(a) o conjunto dos valores de L para os quais a área que sobra do empacotamento não pode ser menor que 21 é finito? Caso seja, qual seria seu máximo?

(b) Qual é o maior valor possível para a área que sobra depois de otimizar o empacotamento?

Rogerio de Queiroz Chaves, Helvecio Pereira de Castro,
Durval José Tonon e Valdivino Vargas Junior

Endereço: Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Caixa Postal 131
74001-970 - Goiânia - GO - Brasil
rogerio@mat.ufg.br, hpcastro@mat.ufg.br,
djtonon@mat.ufg.br, vvjunior@mat.ufg.br