

Curvas extremais do funcional $\int (k_1 - k_2)ds$ e curvas de Darboux.

Uma curva numa superfície é uma curva de Darboux se sua esfera osculatriz em cada ponto é tangente à superfície. A equação diferencial destas curvas foi dada por primeira vez por Darboux em [3]. Posteriormente importantes matemáticos estudaram estas curvas, como por exemplo [1],[2],[8].

L. Santaló demonstrou [9] uma propriedade característica das curvas de Darboux, identificando-as como as curvas extremais da torção geodésica total ($\int \tau_g ds$). Utilizando as formulas do cálculo de variações clássico obteve as equações diferenciais das curvas extremais da torção geodésica total e observou que esta equação coincide com a equação diferencial das curvas de Darboux dada por Darboux.

Curvas de Darboux é um dos vários exemplos que aparecem de curvas definidas sobre superfícies para as quais as ferramentas do cálculo de variações tornam-se úteis (vide [4],[5],[6],[7]). Nosso intuito neste seminário é apresentar alguns exemplos de curvas definidas com ajuda do cálculo de variações sobre uma superfície e apresentar algumas aplicações como por exemplo o seguinte resultado:

Proposição 1. *As únicas superfícies para as quais as curvas extremais do funcional $\int (k_1 - k_2)ds$ coincidem com as curvas loxodrômicas são o cone e o cilindro de revolução, o toro e as cíclicas de Dupin.*

Referências

- [1] BLASCHKE, W. Bestimmung der flächen, derend-linien gleichzeitig böschungslinien sind. *Mathematische Zeitschrift* 27, 1 (1928), 150–153.
- [2] COSSERAT, E. Sur les courbes tracées sur une surface et dont la sphère osculatrice est tangente en chaque point à la surface. *Note Comptes Rendus Acad. Scien. Paris* 121 (1895), 43–46.
- [3] DARBOUX, G. Des courbes tracées sur une surface, et dont la sphère osculatrice est tangente en chaque point a la surface. *CR* 73 (1871), 732–736.
- [4] GARCIA, R., LANGEVIN, R., AND WALCZAK, P. Darboux curves on surfaces II. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)* 47, 4 (2016), 1119–1154.

- [5] GARCIA, R., LANGEVIN, R., AND WALCZAK, P. Darboux curves on surfaces I. *J. Math. Soc. Japan* 69, 1 (2017), 1–24.
- [6] HILBERT, D., AND COHN-VOSSEN, S. *Geometry and the imagination*. Chelsea Publishing Company, New York, N. Y., 1952. Translated by P. Neményi.
- [7] OPREA, J. *The mathematics of soap films: explorations with Maple[®]*, vol. 10 of *Student Mathematical Library*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [8] PELL, A. “ D ” lines on quadrics. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1, 3 (1900), 315–322.
- [9] SANTALÓ, L. A. Surfaces whose D -curves are geodesics or isogonal trajectories of the lines of curvature. *Publ. Inst. Mat. Univ. Nac. Litoral* 5 (1945), 255–267.