Mestrado em Modelagem e Otimização – PPGMO

Disciplina: Modelagem Computacional
Prof. Thiago Alves de Queiroz

Lista de Exercícios – 7

OBS.: Para todos os exercícios, quando aplicável, considere as soluções com 5 casas decimais.

1) Escreva o código em Octave para o método de Diferenças Finitas para a Equação de Poisson. A partir dele, resolva a equação diferencial parcial elíptica abaixo com $h=k=0,1$. Compare os resultados com a solução exata $u(x, y)=(x-y)^2$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2;$$

$$u(x,0) = x^2, \quad u(x,2) = (x-2)^2, \quad 0 \le x \le 1;$$

$$u(0,y) = y^2, \quad u(1,y) = (y-1)^2, \quad 0 \le y \le 2.$$

2) Escreva o código em Octave para o método de Diferenças Finitas para a Equação de Poisson. A partir dele, resolva a equação diferencial parcial elíptica abaixo com $h=0,2$ e $k=0,1$. Compare os resultados com a solução exata $u(x, y)=e^{xy}$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (x^2+y^2)e^{xy}, \qquad 0 < x < 2, \; 0 < y < 1;$$

$$u(0,y) = 1, \quad u(2,y) = e^{2y}, \qquad 0 \le y \le 1;$$

$$u(x,0) = 1, \quad u(x,1) = e^{x}, \qquad 0 \le x \le 2.$$

3) Um cabo coaxial é feito de $0,1\ m^2$ de condutor interno e $0,5\ m^2$ de condutor externo. O potencial em um ponto na seção transversal desse cabo é descrito pela equação de Laplace. Suponha que o condutor interno possui 0 volts e o externo possui 110 volts. Encontre o potencial entre os dois condutores usando uma malha com espaçamento horizontal de h=0,1 e vertical de k=0,1 na região $D = \{ (x,y) \mid 0 \le x, y \le 0.5 \}$.

Aproxime a solução da equação de Laplace em cada ponto da malha e, usando as duas condições de contorno, derive o sistema linear a ser resolvido pelo método de Gauss-Seidel.

4) Escreva o código em Octave para o método de Diferença Inversa para a Equação de Calor. A partir dele, resolva a equação diferencial parcial elíptica abaixo com *h=0,4* e *k=0,05*. Compare os resultados no tempo *T=0,5* dada a solução exata *u(x, t)=* $e^{-4\pi^2 t}\sin 2\pi x.$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 2,\ 0 < t;$$

$$u(0,t) = u(2,t) = 0, \quad 0 < t,$$

$$u(x,0) = \sin 2\pi x, \quad 0 \le x \le 2.$$

5) Escreva o código em Octave para o método de Diferença Inversa para a Equação de Calor. A partir dele, resolva o problema abaixo.
A análise das relações tensão-deformação e das propriedades de material de um cilindro sujeito, de forma alternada, ao aquecimento e resfriamento resulta na equação:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{4K}\frac{\partial T}{\partial t}, \quad \frac{1}{2} < r < 1,\ 0 < T,$$

em que *T=T(r, t)* é a temperatura, *r* é a distância radial do centro do cilindro, *t* é o tempo e *K* é o coeficiente difusivo. Encontre a aproximação para *T(r, 10)* para o cilindro com raio externo igual a 1, dada às condições de contorno, para *K=0,1; k=0,5;* e, *h=△r=0,1*.

$$T(1,t) = 100 + 40t, \quad T\left(\frac{1}{2}, t\right) = t, \quad 0 \le t \le 10;$$

$$T(r,0) = 200(r - 0.5), \quad 0.5 \le r \le 1.$$

6) Escreva o código em Octave para o método de Diferenças Finitas para a Equação da Onda. A partir dele, resolva a equação diferencial parcial hiperbólica abaixo para *T = 0,25*, com $h = \frac{\pi}{10}$ e *k=0,05*; com $h = \frac{\pi}{20}$ e *k=0,01*; com $h = \frac{\pi}{20}$ e *k=0,05*. Compare os resultados também com a solução exata: *u(x, t)=cos(t)sin(x)*.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < \pi,\ 0 < t;$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad 0 < t,$$

$$u(x,0) = \sin x, \quad 0 \le x \le \pi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \pi,$$

7) Escreva o código em Octave para o método de Diferenças Finitas para a Equação da Onda. A partir dele, resolva o problema abaixo.
A pressão do ar $p(x,t)$ em um tubo de um órgão musical é governada pela equação da onda :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l,\ 0 < t,$$

sendo l o comprimento do tubo e c uma constante física.

- Se o tubo é aberto, as condições de contorno são:

  $p(0,t) = p_0 \quad \text{and} \quad p(l,t) = p_0.$

- Se o tubo é fechado na extremidade $x=l$, as condições de contorno são:

  $p(0,t) = p_0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial p}{\partial x}(l,t) = 0.$

- Assume-se que $c=1$, $l=1$ e as condições inicias:

  $p(x,0) = p_0 \cos 2\pi x, \quad \text{and} \quad \frac{\partial p}{\partial t}(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1.$

Aproxime a pressão para um tubo aberto com $p_0 = 0,9$ em $x=0,5$ para $T=0,5$ e $T=1$, considerando $h=k=0,1$.