Mestrado em Modelagem e Otimização – PPGMO

Disciplina: Modelagem Computacional
Prof. Thiago Alves de Queiroz

Lista de Exercícios – 6

OBS.: Para todos os exercícios, quando aplicável, considere as soluções com 5 casas decimais.

1) Aplique a iteração funcional para aproximar a solução na norma l_∞ do seguinte sistema não linear partindo da solução inicial $x^{(0)} = (x_1, x_2)=(1/4, 1/4)$. Considere obter $x^{(2)}$ e apresente o erro na norma indicada para cada iteração.

$$5x_1^2 - x_2^2 = 0, \quad x_2 - 0.25(\sin x_1 + \cos x_2) = 0$$

2) Use o método de Newton para sistemas não lineares com $x^{(0)} = (0, 0)$ para computar $x^{(2)}$, mostrando as operações passo a passo, para o seguinte sistema não linear.

$$4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 + 8 = 0,$$
$$\frac{1}{2}x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0.$$

3) Escreva o código em Octave para o método de Newton para sistemas não lineares. A partir dele, resolva o sistema não linear iterando até $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-6}$.

$$6x_1 - 2\cos(x_2x_3) - 1 = 0,$$
$$9x_2 + \sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06} + 0.9 = 0,$$
$$60x_3 + 3e^{-x_1x_2} + 10\pi - 3 = 0.$$

Use $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^t$.

4) Escreva o código em Octave para o método de Newton para sistemas não lineares. Dada a solução inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1 - 1)^t$, estude a convergência do método sobre este sistema indicando o número de iterações necessárias para o método convergir em $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-6}$. O que pode ter influenciado na convergência do método? Justifique comparando com a resolução do **Exercício 3**.

$$3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0,$$
$$x_1^2 - 625x_2^2 - \frac{1}{4} = 0,$$
$$e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

5) Use o método de Broyden com $x^{(0)} = (0, 0)$ para computar $x^{(2)}$, mostrando as operações passo a passo, para o seguinte sistema não linear.

$$\sin(4\pi x_1 x_2) - 2x_2 - x_1 = 0,$$
$$\left(\frac{4\pi - 1}{4\pi}\right)(e^{2x_1} - e) + 4ex_2^2 - 2ex_1 = 0.$$

6) Escreva o código em Octave para o método de Broyden para sistemas não lineares. Dada a solução inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1 - 1)^t$, estude a convergência do método sobre este sistema indicando o número de iterações necessárias para o método convergir em $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-6}$. O que pode ter influenciado na convergência do método? Compare também com a resolução do **Exercício 4.**

$$3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2} = 0,$$
$$x_1^2 - 625x_2^2 - \frac{1}{4} = 0,$$
$$e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

7) Escreva o código em Octave para o método do Tiro Linear para problemas de valor de contorno lineares. A partir dele, aproxime a solução do seguinte problema de valor de contorno sabendo que a sua solução é $y(x) = e^2(e^4 - 1)^{-1}(e^{2x} - e^{-2x}) + x$. Compare os resultados considerando *h = 0,5* e *h = 0,25*.

$$y'' = 4(y - x), \quad 0 \le x \le 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2,$$

8) Escreva o código em Octave para o método do Tiro Linear para problemas de valor de contorno lineares. A partir dele, aproxime a solução do seguinte problema de valor de contorno.

$$y'' = -(x + 1)y' + 2y + (1 - x^2)e^{-x}, \quad 0 \le x \le 1, \ y(0) = -1, \ y(1) = 0; \ \text{use } h = 0.1.$$

9) Escreva o código em Octave para o método do Tiro Não Linear para problemas de valor de contorno não lineares. A partir dele, aproxime a solução do seguinte problema de valor de contorno sabendo que a sua solução é *y = ln(x)*. Compare os resultados para *h = 0,5* e *h = 0,25*.

$$y'' = -(y')^2 - y + \ln x, \quad 1 \le x \le 2, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = \ln 2.$$

10) Escreva o código em Octave para o método do Tiro Não Linear para problemas de valor de contorno não lineares. A partir dele, aproxime a solução do seguinte problema de valor de contorno, considerando $TOL = 10^{-4}$ e $N=20$. Compare com a solução atual *y(x) = 2 + sin (x)* e informe o erro absoluto.

$$y'' = \tfrac{1}{2}\left(1 - (y')^2 - y \sin x\right), \quad 0 \le x \le \pi, \ y(0) = 2, \ y(\pi) = 2;$$

11) Escreva o código em Octave para o método de Diferenças Finitas Linear para problemas de valor de contorno lineares. A partir dele, aproxime a solução do seguinte problema de valor de contorno sabendo que a sua solução é $y(x) = e^2(e^4 - 1)^{-1}(e^{2x} - e^{-2x}) + x$. Compare os resultados considerando *h = 0,5* e *h = 0,25*. Compare os resultados também com o **Exercício 7** e comente sobre qual dos métodos é o melhor.

$$y'' = 4(y - x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2,$$

12) Usando o método do Tiro Linear e o método de Diferenças Finitas Linear, aproxime a solução do seguinte problema de valor de contorno, considerando $TOL = 10^{-4}$ e $h=0,1$. Compare os métodos e comente sobre qual é o melhor.

$$y'' = x^{-1}y' + 3x^{-2}y + x^{-1}\ln x - 1, \quad 1 \leq x \leq 2, y(1) = y(2) = 0;$$