Mestrado em Modelagem e Otimização – PPGMO

Disciplina: Modelagem Computacional
Prof. Thiago Alves de Queiroz

Lista de Exercícios – 5

OBS.: Para todos os exercícios, quando aplicável, considere as soluções com 5 casas decimais.

1. Encontre as normas l_2 e l_∞ dos seguintes vetores:

a) $\mathbf{x} = (3, -4, 0, 3/2)^t$

b) $\mathbf{x} = (\sin(k), \cos(k), 2^k)^t$ para um inteiro k fixo

2) Prove que as seguintes sequências são convergentes e encontre os limites associados.

a) $\mathbf{x}^{(k)} = (1/k, e^{1-k}, -2/k^2)^t$

b) $\mathbf{x}^{(k)} = (ke^{-k^2}, (\cos k)/k, \sqrt{k^2+k}-k)^t$

3) Os seguintes sistemas lineares Ax = b tem x como a solução atual e $\tilde{x}$ como solução aproximada. Calcule $\| x - \tilde{x} \|_\infty$ e $\| A\tilde{x} - b \|_\infty$.

a)
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 &= \tfrac{1}{63}, \\ \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 &= \tfrac{1}{168}, \end{aligned}$$
$$\mathbf{x} = \left(\tfrac{1}{7}, -\tfrac{1}{6}\right)^t,$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (0.142, -0.166)^t.$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= -1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 2, \end{aligned}$$
$$\mathbf{x} = (0, -7, 5)^t,$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (-0.2, -7.5, 5.4)^t.$$

4) Calcule os autovalores, os autovetores, o raio espectral e as normas l_2 e l_∞ das seguintes matrizes.

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

5) Verifique se as matrizes abaixo são convergentes.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 16 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

6) Escreva o código em Octave para o método iterativo de Jacobi. A partir dele, resolva o sistema linear abaixo com tolerância de 0,001 na norma l_∞.

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 + \phantom{x_4 +{}} x_5 &= 6, \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 \phantom{{}+ x_5} &= 6, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 &= 6, \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 \phantom{{}+ x_5} &= 6, \\ 2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 &= 6. \end{aligned}$$

7) Escreva o código em Octave para o método iterativo de Gauss-Seidel. A partir dele, resolva o sistema linear abaixo com tolerância de 0,001 na norma l_∞. Compare a solução com a do exercício 6 e verifique se é possível concluir qual dos métodos é o melhor.

$$
\begin{aligned}
4x_1 + x_2 + x_3 + \quad\quad x_5 &= 6,\\
-x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 \quad\quad &= 6,\\
2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 &= 6,\\
-x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 \quad\quad &= 6,\\
2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 &= 6.
\end{aligned}
$$

8) Use o método de Jacobi e de Gauss-Seidel para resolver o sistema linear **A**x = **b**, em que a matriz **A** = $[a_{ij}]$ e o vetor **b** são montados conforme a expressão abaixo. Além disso, considere a tolerância de 0,00001 na norma l_∞. Verifique a necessidade de adaptar os métodos iterativos para lidar com os casos de coeficiente $a_{ii} = 0$.

$$
a_{i,j} = \begin{cases}
2i, & \text{para} \quad j = i \text{ and } i = 1, 2, \ldots, 80,\\
0.5i, & \text{para} \quad \begin{cases} j = i + 2 \text{ and } i = 1, 2, \ldots, 78,\\ j = i - 2 \text{ and } i = 3, 4, \ldots, 80, \end{cases}\\
0.25i, & \text{para} \quad \begin{cases} j = i + 4 \text{ and } i = 1, 2, \ldots, 76,\\ j = i - 4 \text{ and } i = 5, 6, \ldots, 80, \end{cases}\\
0, & \text{caso contrário.}
\end{cases}
$$

e o vetor **b** com $b_i = \pi$, para i=1, 2, ..., 80.