Mestrado em Modelagem e Otimização – PPGMO

Disciplina: Modelagem Computacional
Prof. Thiago Alves de Queiroz

Lista de Exercícios – 4

OBS.: Para todos os exercícios, quando aplicável, considere as soluções com 5 casas decimais.

1. Escreva o código em Octave para o método de Eliminação de Gauss com substituição inversa e, a partir dele, determine a solução dos seguintes sistemas. O programa deverá imprimir se foi preciso realizar permutação entre linhas.

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 & & &= 3, \\ x_1 + 1.5x_2 & & &= 4.5, \\ - 3x_2 + 0.5x_3 & & &= -6.6, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 & & &= 0.8. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad + x_4 &= 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= -3. \end{aligned}$$

2. Dado o sistema linear abaixo faça o que se pede:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + \alpha x_3 &= -2, \\ -x_1 + 2x_2 - \alpha x_3 &= 3, \\ \alpha x_1 + x_2 + x_3 &= 2. \end{aligned}$$

a) Determine o(s) valor(es) de α de forma que o sistema não tenha solução.
b) Determine o(s) valor(es) de α de forma que o sistema tenha infinitas soluções.
c) Determine o(s) valor(es) de α de forma que o sistema tenha uma única solução.

3. É comum particionar matrizes em uma coleção de sub-matrizes. Veja as matrizes A e B abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 6 & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

As matrizes foram particionadas em:

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ \hdashline 6 & 5 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 7 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ \hdashline -2 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} B_{11} & B_{12} \\ \hdashline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$$

a) Verifique que o produto de A por B é dada por:

$$AB = \left[\begin{array}{c:c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ \hdashline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{array}\right]$$

b) Se B fosse particionada da seguinte forma, o produto estabelecido na letra (a) continuaria válido?

$$B = \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 7 & 0 \\ \hdashline 3 & 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} B_{11} & B_{12} \\ \hdashline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$$

4. Calcule o determinante das seguintes matrizes. Mostre as operações elementares que foram realizadas.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

5. Determine os valores de α para que a matriz A seja singular.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 2 & \alpha & -1 \end{bmatrix}$$

6. Escreva o código em Octave para o método de Fatoração LU com $l_{ii} = 1$ para todo i. A partir dele, determine a fatoração da seguinte matriz.

$$\begin{bmatrix} 2.1756 & 4.0231 & -2.1732 & 5.1967 \\ -4.0231 & 6.0000 & 0 & 1.1973 \\ -1.0000 & -5.2107 & 1.1111 & 0 \\ 6.0235 & 7.0000 & 0 & -4.1561 \end{bmatrix}$$

7. Escreva o código em Octave para o método de Fatoração LU de forma a resolver o sistema de equações lineares abaixo.

$$\begin{aligned} 2.1756x_1 + 4.0231x_2 - 2.1732x_3 + 5.1967x_4 &= 17.102, \\ -4.0231x_1 + 6.0000x_2 \qquad\qquad\quad + 1.1973x_4 &= -6.1593, \\ -1.0000x_1 - 5.2107x_2 + 1.1111x_3 \qquad\qquad\quad &= 3.0004, \\ 6.0235x_1 + 7.0000x_2 \qquad\qquad\quad - 4.1561x_4 &= 0.0000. \end{aligned}$$

8. Escreva o código em Octave para o método de Fatoração LDL^t. A partir dele, determine a fatoração da matriz A abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

9. Escreva o código em Octave para o método de Fatoração LDL^t de forma a resolver o sistema de equações lineares abaixo.

$$\begin{aligned}
4x_1 + x_2 - x_3 \phantom{{}+2x_4} &= 7, \\
x_1 + 3x_2 - x_3 \phantom{{}+2x_4} &= 8, \\
-x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= -4, \\
2x_3 + 4x_4 &= 6.
\end{aligned}$$

10. Determine o(s) valor(es) de α para que a matriz A abaixo seja positiva definida.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & -1 \\ \alpha & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$