Mestrado em Modelagem e Otimização – PPGMO

Disciplina: Modelagem Computacional
Prof. Thiago Alves de Queiroz

Lista de Exercícios – 3

OBS.: Para todos os exercícios, considere as soluções com 5 casas decimais.

1. Verifique que os seguintes problemas de valor inicial possuem solução única.
a) $y' = y\cos(t)\,,\quad 0 \le t \le 1,\quad y(0) = 1$
b) $y' = \frac{2}{t}y + t^2 e^t,\quad 1 \le t \le 2,\quad y(1) = 0$

2. Escreva o código em Octave para o método de Euler e, a partir dele, determine a solução do problema de valor inicial $y' = \frac{y}{t} - \left(\frac{y}{t}\right)^2,\quad 1 \le t \le 2,\quad y(1) = 1,\quad com\ h = 0{,}1.$
Sabendo que a solução exata é $y(t) = \frac{t}{1+\ln(t)}$, imprima também o erro absoluto para cada aproximação e o gráfico com a solução exata e a aproximada pelo método.

3. Escreva o código em Octave para o método de Taylor de Ordem 2 e, a partir dele, determine a solução do problema de valor inicial $y' = \frac{y}{t} - \left(\frac{y}{t}\right)^2,\quad 1 \le t \le 2,\quad y(1) = 1,\quad com\ h = 0{,}1.$
Sabendo que a solução exata é $y(t) = \frac{t}{1+\ln(t)}$, imprima também o erro absoluto para cada aproximação e o gráfico com a solução exata e a aproximada pelo método. Compare com as soluções dos métodos de Euler e de Taylor de Ordem 2 e discuta qual dos métodos é o melhor em termos do erro para a solução exata.

4. Escreva o código em Octave para o método de Runge-Kutta de Quarta Ordem e, a partir dele, determine a solução do problema de valor inicial $y' = \frac{y}{t} - \left(\frac{y}{t}\right)^2,\quad 1 \le t \le 2,\quad y(1) = 1,\quad com\ h = 0{,}1.$
Sabendo que a solução exata é $y(t) = \frac{t}{1+\ln(t)}$, imprima também o erro absoluto para cada aproximação e o gráfico com a solução exata e a aproximada pelo método. Compare com a solução do método de Euler e de Taylor de Ordem 2 e discuta qual dos métodos é o melhor em termos do erro para a solução exata.

5. Dada a aproximação encontrada pelos métodos dos exercícios 2, 3 e 4, use um método de interpolação (Lagrange) para aproximar em: *t=1,25, t=1,35, t=1,45, t=1,55, t=1,73, t=1,83* e *t=1,93*, dada a interpolação feita sobre cada um dos métodos: Euler, Taylor de Ordem 2 e Runge-Kutta de Quarta Ordem. Compare o resultado encontrado por cada interpolação com a solução exata nesses pontos. Aponte qual dos métodos permitiu gerar o polinômio interpolador de melhor resultado.

6. Escreva o código em Octave para o método Preditor Corretor de Adams de Quarta Ordem e, a partir dele, determine a solução do problema de valor inicial $y' = \frac{y}{t} - \left(\frac{y}{t}\right)^2, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = 1, \quad com\ h = 0{,}1.$

Sabendo que a solução exata é $y(t) = \frac{t}{1+\ln(t)}$, imprima também o erro absoluto para cada aproximação e o gráfico com a solução exata e a aproximada pelo método. Compare com a solução do método de Runge-Kutta de Quarta Ordem e discuta qual dos métodos é melhor em termos do erro para a solução exata.

7. Escreva o código em Octave para o método Preditor Corretor, em que o método de Runge-Kutta de Quarta Ordem é usado como Preditor e o método de Adams-Moulton de Quarta Ordem é usado como corretor. A partir dele, determine a solução do problema de valor inicial $y' = \frac{y}{t} - \left(\frac{y}{t}\right)^2, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = 1, \quad com\ h = 0{,}1.$

Sabendo que a solução exata é $y(t) = \frac{t}{1+\ln(t)}$, imprima também o erro absoluto para cada aproximação e o gráfico com a solução exata e a aproximada pelo método. Compare com a solução do método Preditor-Corretor de Adams de Quarta Ordem e discuta qual dos métodos é melhor.

8. Resolva os seguintes problemas de valor inicial com os métodos Runge-Kutta de Quarta Ordem e Preditor Corretor de Adams de Quarta Ordem. Sabendo a solução exata, imprima também o erro absoluto para cada aproximação por cada método numérico e o gráfico com a solução exata e a aproximada pelo método. Além disso, compare e discuta qual dos métodos é o melhor em cada problema em termos do erro para a solução exata.

a) $t^2y'' - 2ty' + 2y = t^3\ln(t), \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0, \quad com\ h = 0{,}1.$

A solução exata é $y(t) = \frac{7}{4}t + \frac{1}{2}t^3\ln(t) - \frac{3}{4}t^3.$

b)$t^3y''' - t^2y'' + 3ty' - 4y = 5t^3\ln(t) + 9t^3, \; 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0, \quad y''(1) = 3, \; h = 0{,}1.$

A solução exata é $y(t) = -t^2 + t\,cos(\ln(t)) + t\,sin(\ln(t)) + t^3\ln(t).$

9. Escreva o código em Octave para o método Trapezoidal Implícito com Iteração de Newton e, a partir dele, determine a solução do problema de valor inicial rígido:

$y' = -20y + 20\sin(t) + \cos(t), \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 1, \quad com\ h = 0{,}25.$

Sabendo que a solução exata é $y(t) = \sin(t) + e^{-20t}$, imprima também o erro absoluto para cada aproximação e o gráfico com a solução exata e a aproximada pelo método. Compare com a solução encontrada pelos métodos Runge-Kutta de Quarta Ordem e Preditor Corretor de Adams de Quarta Ordem e discuta qual dos métodos é melhor em termos do erro para a solução exata.

10. A função $f(x) = 2x^4 + x^3 - 31x^2 - 26x + 24$ possui quatro raízes reais denominadas *a*, *b*, *c* e *d*, sendo obtidas pelo método da Bisseção.

Essas raízes definem uma função *R*, tal que *R(a) = 15*, *R(b) = 17*, *R(c) = 18* e *R(d) = 20*. Ao aproximar *R* pelo polinômio interpolador de Lagrange de grau 3, chega-se na função $P_R(x)$.

Deseja-se resolver o seguinte problema de valor inicial usando o método de Runge-Kutta de Quarta Ordem, a saber:

$$y'' - 2y' + y = z(t), \quad m \leq t \leq n, \quad y(m) = y'(m) = 0, \quad com\ h = 0{,}05,$$

em que $m = P_R\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $n = P_R\left(\frac{c+d}{2}\right)$ e $z(t) = \int_{\sin(t)}^{\cos(t)} \left(\frac{P_R(t)}{x^2-4}\right) dx$ é resolvida, dado o valor de *t*, usando a regra de Simpson Composta.

OBS.: Nesta questão deve-se usar **somente** métodos numéricos: para obter as raízes, o polinômio interpolador, a integral em cada aproximação e resolver o problema de valor inicial.