Mestrado em Modelagem e Otimização - RC/UFG

Modelagem Computacional

Aula 9[2]

Prof. Thiago Alves de Queiroz

[2][Cap. 12] BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. Numerical Analysis (9th ed). Cengage Learning, 2010.

Equações Diferenciais Parciais

- As equações diferenciais parciais são categorizadas para melhor estudo e desenvolvimento de técnicas de resolução;
- Estuda-se as equações conhecidas como *elípticas*, *parabólicas* e *hiperbólicas*;
- As *equações elípticas* a serem estudadas são as do tipo *equação de Poisson*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = f(x, y). \tag{1}$$

- Na equação de Poisson, a função f descreve a entrada do problema sobre uma região plana R com contorno em S;
- A equação de Poisson possui aplicações, por exemplo, no estudo de distribuição de calor em regiões planas, efeitos da energia potencial devido a ação da gravidade e fluidos incompressíveis;
- Ao impor que $f(x, y) \equiv 0$ na eq. (1), tem-se a chamada *equação de Laplace*;

Equações Diferenciais Parciais

- A *equação parabólica* a ser estudada tem a forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0. \tag{2}$$

- A eq. (2) representa o fluxo de calor que passa em uma barra de comprimento l considerando uma temperatura uniforme;

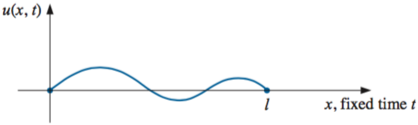
- A equação parabólica tem aplicação direta no estudo de difusão de gases, sendo conhecida como *equação de difusão*;

Equações Diferenciais Parciais

- A *equação hiperbólica* a ser estudada tem a forma:

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = 0, \text{ para } 0 < x < l \text{ e } 0 < t. \qquad (3)$$

- A eq. (3) representa a equação da onda em uma dimensão, considerando que uma corda de comprimento l é esticada entre dois suportes horizontais;



- A eq. (3) representa a vibração da corda em um plano vertical, em que $u(x,t)$ descreve o deslocamento no ponto x e tempo t;
- A equação hiperbólica tem aplicação direta no estudo de vibração de vigas e na transmissão de eletricidade ao longo de uma linha;

Equações Elípticas

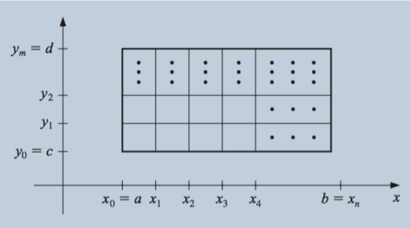
- A equação diferencial parcial elíptica a ser estudada consiste na equação de Poisson da forma:

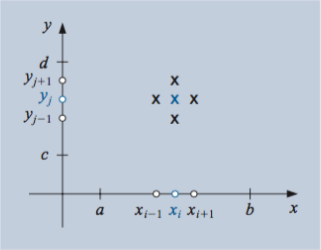
$$\nabla^2 u(x,y) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y), \tag{4}$$

  com $R = \{(x,y) | a < x < b, c < y < d\}$, com $u(x,y) = g(x,y)$ para $(x,y) \in S$;
- O conjunto S denota o contorno da região retangular R;
- Se f e g são contínuas em seus domínios, então a eq. (4) possui solução única;
- A resolução da equação de Poisson é feita usando uma adaptação do método de diferenças finitas para o caso de duas dimensões;

Equações Elípticas

- O primeiro passo é escolher inteiros n e m para definir o tamanho dos passos $h = \frac{b-a}{n}$ e $k = \frac{d-c}{m}$;
- Particiona-se o intervalo $[a, b]$ em n partes iguais e o intervalo $[c, d]$ em m partes iguais;
- Na região retangular R, associa-se a cada ponto da malha as coordenadas (x_i, y_j), com $x_i = a + ih$, para $i = 0, 1, \ldots, n$, e $y_j = c + jk$, com $j = 0, 1, \ldots, m$;
- Nos pontos internos da malha, isto é, para $i = 1, 2, \ldots, n-1$ e $j = 1, 2, \ldots, m-1$, aplica-se a fórmula de Taylor para x e, em seguida, para y, a fim de obter as fórmulas de diferença-centrada;





Equações Elípticas

- Com as fórmulas de diferença-centrada, chega-se no *método de Diferenças Finitas*:

$$2\left[\left(\frac{h}{k}\right)^2+1\right]w_{ij}-(w_{i+1,j}+w_{i-1,j})-\left(\frac{h}{k}\right)^2(w_{i,j+1}+w_{i,j-1})=-h^2f(x_i,y_j),$$

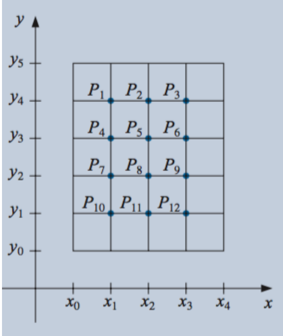
para $i=1,2,\ldots,n-1$ e $j=1,2,\ldots,m-1$, e

$$w_{0j}=g(x_0,y_j) \quad \text{e} \quad w_{nj}=g(x_n,y_j), \quad \text{para} \quad j=0,1,\ldots,m;$$
$$w_{i0}=g(x_i,y_0) \quad \text{e} \quad w_{im}=g(x_i,y_m), \quad \text{para} \quad i=1,2,\ldots,n-1;$$

- Sendo que w_{ij} aproxima $u(x_i,y_j)$, com erro de truncamento local de ordem $O(h^2+k^2)$;
- A aproximação dos pontos no interior da malha usam as condições de contorno sempre que necessário, assim resultando em um sistema linear de ordem $(n-1)(m-1)\times(n-1)(m-1)$;

Equações Elípticas

- Uma forma mais conveniente de escrever as equações do sistema linear é considerar $P_l = (x_i, y_j)$ e $w_l = w_{ij}$, em que $l = i + (m - 1 - j)(n - 1)$, para $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ e $j = 1, 2, \ldots, m - 1$;
- Com isso, o pontos da malha são rotulados da esquerda para a direita e de cima para baixo;



Exemplo

- **Exemplo.** Determine a distribuição de calor em uma placa fina quadrada de metal com dimensões $0,5 \times 0,5 m^2$ usando $n = m = 4$. Duas condições de contorno são impostas em zero graus, enquanto o calor nos outros contornos cresce linearmente de zero graus em um canto até 200 graus para o outro canto.
- **Resposta.** Dada as condições de contorno com valor zero ao longo dos eixos x e y, o problema é expresso por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0, \tag{5}$$

para $R = \{(x, y) | 0 < x < 0,5, 0 < y < 0,5\}$;
- As condições de contorno são: $u(0, y) = 0$, $u(x, 0) = 0$, $u(x; 0,5) = 200x$ e $u(0,5; y) = 200y$.
- A equação de diferenças, para $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$ e $h = k = 1$, é definida como:

$$4w_{i,j} - w_{i+1,j} - w_{i-1,j} - w_{i,j-1} - w_{i,j+1} = 0. \tag{6}$$

Exemplo

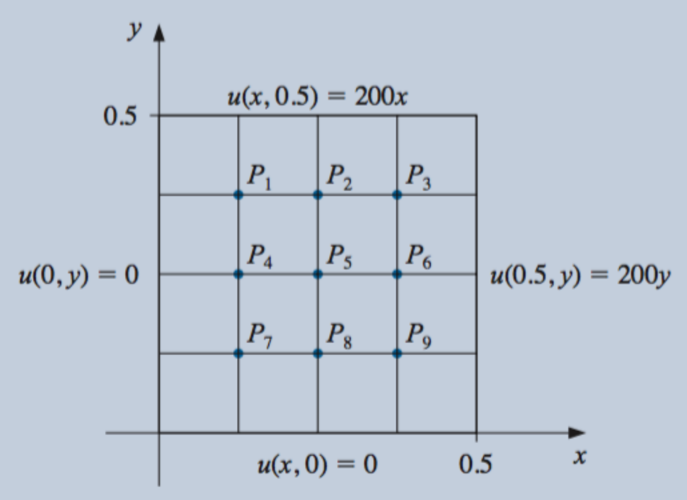


Figura: Malha para o exemplo considerando $n = m = 4$.

Exemplo

- Escrevendo os termos em função de $w_i = u(P_i)$, tem-se as equações nos pontos P_i:

$$\begin{aligned}
P_1: &\quad 4w_1 - w_2 - w_4 = w_{0,3} + w_{1,4},\\
P_2: &\quad 4w_2 - w_3 - w_1 - w_5 = w_{2,4},\\
P_3: &\quad 4w_3 - w_2 - w_6 = w_{4,3} + w_{3,4},\\
P_4: &\quad 4w_4 - w_5 - w_1 - w_7 = w_{0,2},\\
P_5: &\quad 4w_5 - w_6 - w_4 - w_2 - w_8 = 0,\\
P_6: &\quad 4w_6 - w_5 - w_3 - w_9 = w_{4,2},\\
P_7: &\quad 4w_7 - w_8 - w_4 = w_{0,1} + w_{1,0},\\
P_8: &\quad 4w_8 - w_9 - w_7 - w_5 = w_{2,0},\\
P_9: &\quad 4w_9 - w_8 - w_6 = w_{3,0} + w_{4,1},
\end{aligned}$$

$$w_{1,0} = w_{2,0} = w_{3,0} = w_{0,1} = w_{0,2} = w_{0,3} = 0,$$

$$w_{1,4} = w_{4,1} = 25, \quad w_{2,4} = w_{4,2} = 50, \quad \text{and} \quad w_{3,4} = w_{4,3} = 75.$$

Figura: Valores resultantes ao aplicar as condições de contorno.

Exemplo

- O sistema linear pode, então, ser escrito na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 50 \\ 150 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \end{bmatrix}.$$

- A solução obtida pelo método de Gauss-Seidel é: $w_1 = 18,75$, $w_2 = 37,50$, $w_3 = 56,25$, $w_4 = 12,50$, $w_5 = 25,00$, $w_6 = 37,50$, $w_7 = 6,25$, $w_8 = 12,50$ e $w_9 = 18,75$;

Diferenças Finitas para a Equação de Poisson

INPUT endpoints a, b, c, d; integers $m \geq 3$, $n \geq 3$; tolerance TOL; maximum number of iterations N.

OUTPUT approximations $w_{i,j}$ to $u(x_i, y_j)$ for each $i=1, \ldots, n-1$ and for each $j = 1, \ldots, m-1$ or a message that the maximum number of iterations was exceeded.

Step 1 Set $h = (b-a)/n$;
$k = (d-c)/m$.

Step 2 For $i = 1, \ldots, n-1$ set $x_i = a + ih$. (*Steps* 2 *and* 3 *construct mesh points.*)

Step 3 For $j = 1, \ldots, m-1$ set $y_j = c + jk$.

Step 4 For $i = 1, \ldots, n-1$
for $j = 1, \ldots, m-1$ set $w_{i,j} = 0$.

Step 5 Set $\lambda = h^2/k^2$;
$\mu = 2(1+\lambda)$;
$l = 1$.

Step 6 While $l \leq N$ do Steps 7–20. (*Steps* 7–20 *perform Gauss-Seidel iterations.*)

Step 7 Set $z = \left(-h^2 f(x_1, y_{m-1}) + g(a, y_{m-1}) + \lambda g(x_1, d) + \lambda w_{1,m-2} + w_{2,m-1}\right)/\mu$;
$NORM = |z - w_{1,m-1}|$;
$w_{1,m-1} = z$.

Diferenças Finitas para a Equação de Poisson

Step 8 For $i = 2, \ldots, n-2$

set $z = \big(-h^2 f(x_i, y_{m-1}) + \lambda g(x_i, d) + w_{i-1,m-1} + w_{i+1,m-1} + \lambda w_{i,m-2} \big)/\mu$;
if $|w_{i,m-1} - z| > NORM$ then set $NORM = |w_{i,m-1} - z|$;
set $w_{i,m-1} = z$.

Step 9 Set $z = \big(-h^2 f(x_{n-1}, y_{m-1}) + g(b, y_{m-1}) + \lambda g(x_{n-1}, d) + w_{n-2,m-1} + \lambda w_{n-1,m-2} \big)/\mu$;
if $|w_{n-1,m-1} - z| > NORM$ then set $NORM = |w_{n-1,m-1} - z|$;
set $w_{n-1,m-1} = z$.

Step 10 For $j = m-2, \ldots, 2$ do Steps 11, 12, and 13.

Step 11 Set $z = \left(-h^2 f(x_1, y_j) + g(a, y_j) + \lambda w_{1,j+1} + \lambda w_{1,j-1} + w_{2,j} \right)/\mu$;
if $|w_{1,j} - z| > NORM$ then set $NORM = |w_{1,j} - z|$;
set $w_{1,j} = z$.

Step 12 For $i = 2, \ldots, n-2$

set $z = \left(-h^2 f(x_i, y_j) + w_{i-1,j} + \lambda w_{i,j+1} + w_{i+1,j} + \lambda w_{i,j-1} \right)/\mu$;
if $|w_{i,j} - z| > NORM$ then set $NORM = |w_{i,j} - z|$;
set $w_{i,j} = z$.

Step 13 Set $z = \big(-h^2 f(x_{n-1}, y_j) + g(b, y_j) + w_{n-2,j} + \lambda w_{n-1,j+1} + \lambda w_{n-1,j-1} \big)/\mu$;
if $|w_{n-1,j} - z| > NORM$ then set $NORM = |w_{n-1,j} - z|$;
set $w_{n-1,j} = z$.

Diferenças Finitas para a Equação de Poisson

Step 14 Set $z = \left(-h^2 f(x_1, y_1) + g(a, y_1) + \lambda g(x_1, c) + \lambda w_{1,2} + w_{2,1}\right) / \mu$;
if $|w_{1,1} - z| > NORM$ then set $NORM = |w_{1,1} - z|$;
set $w_{1,1} = z$.

Step 15 For $i = 2, \dots, n-2$
set $z = \left(-h^2 f(x_i, y_1) + \lambda g(x_i, c) + w_{i-1,1} + \lambda w_{i,2} + w_{i+1,1}\right) / \mu$;
if $|w_{i,1} - z| > NORM$ then set $NORM = |w_{i,1} - z|$;
set $w_{i,1} = z$.

Step 16 Set $z = \left(-h^2 f(x_{n-1}, y_1) + g(b, y_1) + \lambda g(x_{n-1}, c) + w_{n-2,1} + \lambda w_{n-1,2}\right) / \mu$;
if $|w_{n-1,1} - z| > NORM$ then set $NORM = |w_{n-1,1} - z|$;
set $w_{n-1,1} = z$.

Step 17 If $NORM \leq TOL$ then do Steps 18 and 19.

Step 18 For $i = 1, \dots, n-1$
for $j = 1, \dots, m-1$ OUTPUT $(x_i, y_j, w_{i,j})$.

Step 19 STOP. (*The procedure was successful.*)

Step 20 Set $l = l + 1$.

Step 21 OUTPUT ('Maximum number of iterations exceeded');
(*The procedure was unsuccessful.*)
STOP.

Equações Parabólicas

- A equação diferencial parcial parabólica a ser estudada consiste na equação de calor, ou difusão, da forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \; 0 < x < l, \; t > 0, \tag{7}$$

  com as condições $u(0,t) = u(l,t) = 0$, $t > 0$ e $u(x,0) = f(x)$ para $0 \leq x \leq l$;
- A resolução da equação parabólica é feita usando diferenças finitas como anteriormente;
- Considera-se um inteiro $m > 0$ e o tamanho do passo $h = \frac{l}{m}$ e outro passo de tamanho k;
- Os pontos da malha (x_i, t_j) são da forma $x_i = ih$, para $i = 0, 1, \ldots, m$, e $t_j = jk$, para $j = 0, 1, \ldots$;
- Considera-se um método de diferença implícita que é incondicionalmente estável;

Equações Parabólicas

- Usando o quociente diferença inverso, tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{k} + \frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j), \ \ \mu_j \in (t_{j-1}, t_j). \quad (8)$$

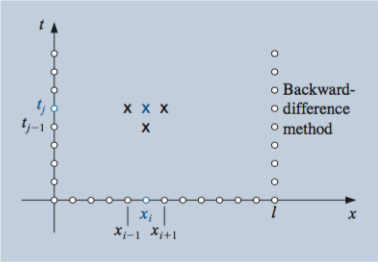


Figura: Para aproximar (x_i, t_i) usam-se os pontos (x_i, t_{j-1}), (x_{i-1}, t_j) e (x_{i+1}, t_j).

Equações Parabólicas

- Ao fazer $\lambda = \alpha^2 \frac{k}{h^2}$, pode-se escrever a eq. (8) como:

$$(1+2\lambda)w_{ij} - \lambda w_{i+1,j} - \lambda w_{i-1,j} = w_{i,j-1}, \tag{9}$$

  para $i = 1, 2, \ldots, m-1$ e $j = 1, 2, \ldots$, com erro de truncamento local da ordem $O(k + h^2)$;
- As condições de contorno impõe que $w_{i,0} = f(x_i)$, para $i = 1, 2, \ldots, m-1$, e $w_{m,j} = w_{0,j} = 0$, para $j = 1, 2, \ldots$;

$$\begin{bmatrix} (1+2\lambda) & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda & (1+2\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ w_{m-1,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1,j-1} \\ w_{2,j-1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j-1} \end{bmatrix}$$

Figura: Na forma matricial, tem-se o sistema linear $Aw^{(j)} = w^{(j-1)}$.

Diferença Inversa para Equação de Calor

INPUT endpoint l; maximum time T; constant α; integers $m \geq 3$, $N \geq 1$.

OUTPUT approximations $w_{i,j}$ to $u(x_i, t_j)$ for each $i = 1, \ldots, m-1$ and $j = 1, \ldots, N$.

Step 1 Set $h = l/m$;
$k = T/N$;
$\lambda = \alpha^2 k/h^2$.

Step 2 For $i = 1, \ldots, m-1$ set $w_i = f(ih)$. (*Initial values.*)
(*Steps* 3–11 *solve a tridiagonal linear system using Algorithm* 6.7.)

Step 3 Set $l_1 = 1 + 2\lambda$;
$u_1 = -\lambda/l_1$.

Step 4 For $i = 2, \ldots, m-2$ set $l_i = 1 + 2\lambda + \lambda u_{i-1}$;
$u_i = -\lambda/l_i$.

Diferença Inversa para Equação de Calor

Step 5 Set $l_{m-1} = 1 + 2\lambda + \lambda u_{m-2}$.

Step 6 For $j = 1, \ldots, N$ do Steps 7–11.

Step 7 Set $t = jk$; (*Current* t_j.)
$z_1 = w_1 / l_1$.

Step 8 For $i = 2, \ldots, m-1$ set $z_i = (w_i + \lambda z_{i-1})/l_i$.

Step 9 Set $w_{m-1} = z_{m-1}$.

Step 10 For $i = m-2, \ldots, 1$ set $w_i = z_i - u_i w_{i+1}$.

Step 11 OUTPUT (t); (*Note:* $t = t_j$.)
For $i = 1, \ldots, m-1$ set $x = ih$;
OUTPUT (x, w_i). (*Note*: $w_i = w_{i,j}$.)

Step 12 STOP. (*The procedure is complete.*) ■

Exemplo

- **Exemplo.** Aplique o método de Diferença Inversa com $h = 0,1$ e $k = 0,01$ para aproximar a solução da equação de calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t),\ 0 < x < 1,\ 0 < t, \tag{10}$$

com as condições $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $t > 0$, $u(x,0) = \sin(\pi x)$ para $0 \le x \le 1$.

- **Resposta.** A tabela abaixo tem o resultado com $i = 0, 1, \ldots, 10$:

x_i	$u(x_i, 0.5)$
0.0	0
0.1	0.00222241
0.2	0.00422728
0.3	0.00581836
0.4	0.00683989
0.5	0.00719188
0.6	0.00683989
0.7	0.00581836
0.8	0.00422728
0.9	0.00222241
1.0	0

Equações Hiperbólicas

- A equação diferencial parcial hiperbólica a ser estudada consiste na equação da onda, em que α é uma constante:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0,\ 0 < x < l,\ t > 0, \tag{11}$$

  com as condições $u(0,t) = u(l,t) = 0$ para $t > 0$; e, $u(x,0) = f(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$ para $0 \leq x \leq l$;
- A resolução da equação hiperbólica é feita usando diferenças finitas como anteriormente;
- Considera-se um inteiro $m > 0$ e o tamanho do passo $h = \frac{l}{m}$ e outro passo de tamanho $k > 0$;
- Os pontos da malha (x_i, t_j) são da forma $x_i = ih$, para $i = 0, 1, \ldots, m$, e $t_j = jk$, para $j = 0, 1, \ldots$;
- As derivadas parciais de segunda ordem são aproximadas por um quociente diferença centrado;

Equações Hiperbólicas

- Assim, chega-se em:

$$\frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{k^2} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0. \tag{12}$$

- Ao definir $\lambda = \frac{\alpha k}{h}$ e resolvendo para $w_{i,j+1}$, obtém-se:

$$w_{i,j+1} = 2(1-\lambda^2)w_{i,j} + \lambda^2(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) - w_{i,j-1}, \tag{13}$$

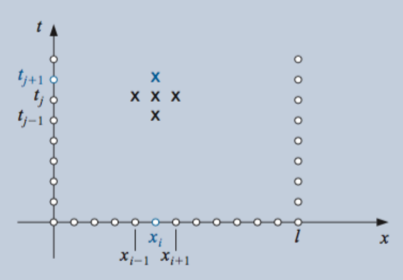
  para $i = 1, 2, \ldots, m-1$ e $j = 1, 2, \ldots$;
- As condições de contorno são: $w_{0,j} = w_{m,j} = 0$, para $j = 1, 2, 3, \ldots$; e, $w_{i,0} = f(x_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, m-1$;

$$\begin{bmatrix} w_{1,j+1} \\ w_{2,j+1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \lambda^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ w_{m-1,j} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_{1,j-1} \\ w_{2,j-1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j-1} \end{bmatrix}$$

Equações Hiperbólicas

- Para aproximar no tempo $(j+1)$ é preciso valores do tempo j e $(j-1)$ como mostra a figura abaixo;
- Ao aproximar no tempo $j=2$, os valores para $j=0$ são dados pelas condições de contorno, ao passo que os valores para $j=1$ são obtidos, para $i=1,2,\ldots,m-1$, de:

$$w_{i,1} = (1-\lambda^2)f(x_i) + \frac{\lambda^2}{2}f(x_{i+1}) + \frac{\lambda^2}{2}f(x_{i-1}) + kg(x_i), \qquad (14)$$



Diferenças Finitas para a Equação da Onda

INPUT endpoint l; maximum time T; constant α; integers $m \geq 2$, $N \geq 2$.

OUTPUT approximations $w_{i,j}$ to $u(x_i, t_j)$ for each $i = 0, \ldots, m$ and $j = 0, \ldots, N$.

Step 1 Set $h = l/m$;
$k = T/N$;
$\lambda = k\alpha/h$.

Step 2 For $j = 1, \ldots, N$ set $w_{0,j} = 0$;
$w_{m,j} = 0$;

Step 3 Set $w_{0,0} = f(0)$;
$w_{m,0} = f(l)$.

Diferenças Finitas para a Equação da Onda

Step 4 For $i = 1, \ldots, m-1$ *(Initialize for $t = 0$ and $t = k$.)*

set $w_{i,0} = f(ih)$;

$$w_{i,1} = (1 - \lambda^2) f(ih) + \frac{\lambda^2}{2}[f((i+1)h) + f((i-1)h)] + kg(ih).$$

Step 5 For $j = 1, \ldots, N-1$ *(Perform matrix multiplication.)*

for $i = 1, \ldots, m-1$

set $w_{i,j+1} = 2(1 - \lambda^2) w_{i,j} + \lambda^2 (w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) - w_{i,j-1}$.

Step 6 For $j = 0, \ldots, N$

set $t = jk$;

for $i = 0, \ldots, m$

set $x = ih$;

OUTPUT $(x, t, w_{i,j})$.

Step 7 STOP. *(The procedure is complete.)*

Exemplo

- **Exemplo.** Aplique o método de Diferenças Finitas com $h = 0,1$ e $k = 0,05$ para aproximar a solução da equação da onda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0,\ 0 < x < 1,\ 0 < t, \tag{15}$$

com as condições de contorno $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $t > 0$, e as condições iniciais $u(x,0) = \sin(\pi x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ para $0 \leq x \leq 1$.

- **Resposta.** Com $h = 0,1$ e $k = 0,05$, tem-se $\lambda = 1$, $m = 10$ e $N = 20$. Usa-se $T = 1$ e $i = 0, 1, \ldots, 10$, obtendo:

x_i	$w_{i,20}$
0.0	0.0000000000
0.1	0.3090169944
0.2	0.5877852523
0.3	0.8090169944
0.4	0.9510565163
0.5	1.0000000000
0.6	0.9510565163
0.7	0.8090169944
0.8	0.5877852523
0.9	0.3090169944
1.0	0.0000000000