Mestrado em Modelagem e Otimização - RC/UFG

Modelagem Computacional

Parte 6[2]

Prof. Thiago Alves de Queiroz

[2][Cap. 6] BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. Numerical Analysis (9th ed). Cengage Learning, 2010.

Sistemas de Equações Lineares

- Sistemas de equações lineares estão associados a muitos problemas em engenharia e ciências.
- O interesse está na resolução de um sistema na forma:

$$
\begin{aligned}
E_1 &: \; a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
E_2 &: \; a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\
&\vdots \\
E_n &: \; a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n.
\end{aligned} \tag{1}
$$

  em que a_{ij} são constantes reais que representam os coeficientes, para $i, j = 1, 2, \ldots, n$; b_i são constantes reais que representam os termos independentes, para $i = 1, 2, \ldots, n$; e, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as variáveis a determinar.
- A aplicação de *métodos diretos* fornece a solução exata do sistema para um número finito de passos.

Sistemas de Equações Lineares

- Três operações elementares são usadas para simplificar um sistema linear:
- Operação 1: equação E_i pode ser multiplicada por qualquer constante λ não nula, isto é, $E_i \leftarrow \lambda E_i$;
- Operação 2: equação E_j pode ser multiplicada por qualquer constante λ não nula e somada a equação E_i, isto é, $E_i \leftarrow E_i + \lambda E_j$;
- Operação 3: equação E_i pode ser permutada com a equação E_j, isto é, $E_i \leftrightarrow E_j$;
- Aplicando uma sequência dessas operações, o sistema linear será transformado em um novo sistema que será mais facilmente resolvido e que possui a mesma solução.
- **Exemplo.** Aplique operações elementares sobre o sistema a seguir de forma a deixá-lo na forma triangular (ou reduzida).

Exemplo

$$
\begin{aligned}
E_1 &: x_1 + x_2 + \quad +3x_4 = 4,\\
E_2 &: 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1,\\
E_3 &: 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3,\\
E_4 &: -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4.
\end{aligned}
$$

- **Resposta.** Eliminar x_1 em E_2, E_3 e E_4 fazendo $E_2 \leftarrow E_2 - 2E_1$, $E_3 \leftarrow E_3 - 3E_1$ e $E_4 \leftarrow E_4 + E_1$.

$$
\begin{aligned}
E_1 &: x_1 + x_2 + \quad +3x_4 = 4,\\
E_2 &: \quad -x_2 - x_3 - 5x_4 = -7,\\
E_3 &: \quad -4x_2 - x_3 - 7x_4 = -15,\\
E_4 &: \quad 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 8.
\end{aligned}
$$

- Eliminar x_2 em E_3 e E_4 fazendo $E_3 \leftarrow E_3 - 4E_2$ e $E_4 \leftarrow E_4 + 3E_2$.

Exemplo

$$
\begin{aligned}
E_1 &: x_1 + x_2 + \quad +3x_4 = 4, \\
E_2 &: \quad - x_2 - x_3 - 5x_4 = -7, \\
E_3 &: \qquad 3x_3 + 13x_4 = 13, \\
E_4 &: \qquad\quad - 13x_4 = -13.
\end{aligned}
$$

- O sistema agora está na forma triangular (ou reduzida) e pode ser resolvido a partir de *substituição inversa*, isto é, de E_4 em direção a E_1, resultando em: $x_4 = 1$, $x_3 = 0$, $x_2 = 2$ e $x_1 = -1$.
- Observe que o sistema anterior pode ser substituído por uma matriz e, assim, os cálculos podem ser realizados diretamente sobre a matriz.

Matrizes

- **Definição.** Uma *matriz de ordem* $n \times m$ é uma tabela retangular com elementos dispostos em n linhas e m colunas, tal que a posição do elemento e o seu valor são importantes.

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

  em que a matriz $n \times m$ é representada por letras maiúsculas, como A. Letras minúsculas, como a_{ij} são usadas para representar o elemento da linha i e coluna j.

- **Exemplo.** A matriz abaixo possui 2 linhas e 3 colunas, isto é, ordem 2×3, com os elementos $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = 3$, $a_{21} = 3$, $a_{22} = 4$ e $a_{23} = 5$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Matrizes

- A matriz $A = [a_{11} \;\; a_{12} \;\; \cdots a_{1n}]$ de ordem $1 \times n$ é chamada de *vetor linha de dimensão n*.
- A matriz $n \times 1$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n_1} \end{bmatrix}$$

  é chamada de *vetor coluna de dimensão n*.
- No caso de vetores, pode-se empregar apenas um subíndice, por exemplo $A = [a_1 \;\; a_2 \;\; \cdots a_n]$.
- Uma matriz de ordem $n \times (n+1)$ pode ser usada para representar o sistema linear na eq. (1):

$$\tilde{A} = [A, b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & \vdots & b_n \end{bmatrix}$$

Matrizes

- A matriz $\tilde{A} = [A, b]$ é chamada de *matriz aumentada* do sistema linear.
- O procedimento feito sobre o sistema do **Exemplo** inicial pode ser repetido sobre a matriz aumentada desse sistema. Esse procedimento é chamado *Eliminação de Gauss com substituição inversa*.
- Uma vez que $a_{11} \neq 0$, pode-se efetuar as operações:

$$E_j \leftarrow E_j - \frac{a_{j1}}{a_{11}} E_1 \text{ para cada } j = 2, 3, \ldots, n. \tag{2}$$

  a fim de eliminar a variável x_1 em cada uma dessas linhas.
- A partir disso, segue-se o desenvolvimento para as colunas $i = 2, 3, \ldots, n-1$ desde que $a_{ii} \neq 0$:

$$E_j \leftarrow E_j - \frac{a_{ji}}{a_{ii}} E_i \text{ para cada } j = i+1, i+2, \ldots, n. \tag{3}$$

Matrizes

- A matriz resultante passa a ter a forma:

$$\tilde{\tilde{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \vdots & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & \vdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} & \vdots & a_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

- O novo sistema linear é triangular de forma que com substituição inversa é possível encontrar a solução:

$$x_n = \frac{a_{n,n+1}}{a_{nn}} \text{ e } x_i = \frac{a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}} \text{ para } i = n-1, n-2, \dots, 1. \tag{4}$$

- O procedimento acima retrata a Eliminação de Gauss, tal que o procedimento falhará se algum dos elementos a_{ii} for zero.
- Uma correção para o problema seria permutar a linha com $a_{ii} = 0$ por outra em que o elemento da coluna i é não nulo. Se não houver tal coluna, então o sistema não possui uma solução única.

Eliminação de Gauss com Substituição Inversa

INPUT number of unknowns and equations n; augmented matrix $A = [a_{ij}]$, where $1 \leq i \leq n$ and $1 \leq j \leq n+1$.

OUTPUT solution $x_1, x_2, \ldots, x_n$ or message that the linear system has no unique solution.

Step 1 For $i = 1, \ldots, n-1$ do Steps 2–4. (*Elimination process.*)

Step 2 Let p be the smallest integer with $i \leq p \leq n$ and $a_{pi} \neq 0$.
If no integer p can be found
then OUTPUT ('no unique solution exists');
STOP.

Step 3 If $p \neq i$ then perform $(E_p) \leftrightarrow (E_i)$.

Step 4 For $j = i+1, \ldots, n$ do Steps 5 and 6.

Step 5 Set $m_{ji} = a_{ji}/a_{ii}$.

Step 6 Perform $(E_j - m_{ji}E_i) \rightarrow (E_j)$;

Eliminação de Gauss com Substituição Inversa

Step 7 If $a_{nn} = 0$ then OUTPUT ('no unique solution exists');
STOP.

Step 8 Set $x_n = a_{n,n+1}/a_{nn}$. *(Start backward substitution.)*

Step 9 For $i = n-1, \ldots, 1$ set $x_i = \left[a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right] \Big/ a_{ii}$.

Step 10 OUTPUT $(x_1, \ldots, x_n)$; *(Procedure completed successfully.)*
STOP.

Álgebra Linear

- **Definição.** Sejam as matrizes A de ordem $n \times m$ e B de ordem $m \times p$. A matriz produto de A por B, denotada por AB, é uma matriz C de ordem $n \times p$ cujas entradas são:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}, \text{ para cada } i = 1, 2, \ldots, n; \; j = 1, 2, \ldots, p. \tag{5}$$

- **Definição.** Uma matriz U de ordem $n \times n$ é triangular superior se, para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, as entradas $u_{ij} = 0$ para cada $i = j+1, j+2, \ldots, n$.
- **Definição.** Uma matriz L de ordem $n \times n$ é triangular inferior se, para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, as entradas $l_{ij} = 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, j-1$.
- **Definição.** Uma matriz A de ordem $n \times n$ é inversível se existe uma matriz A^{-1} de ordem $n \times n$ com $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. A matriz A^{-1} é chamada de inversa de A.

- **Definição.** Suponha que A seja uma matriz quadrada. Então:
- (i) Se $A = [a]$ é uma matriz de ordem 1×1, então $\det(A) = a$.
- (ii) Se A é uma matriz de ordem $n \times n$, com $n > 1$, o menor M_{ij} é o determinante da submatriz de A de ordem $(n-1) \times (n-1)$ deletando a i-ésima linha e a j-ésima coluna de A.
- (iii) O cofator A_{ij} associado com M_{ij} é definido por $A_{ij} = (-1)^{(i+j)} M_{ij}$.
- (iv) O determinante da matriz A de ordem $n \times n$, com $n > 1$, pode ser dada por:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{(i+j)} a_{ij} M_{ij}, \quad \text{para qualquer } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Fatoração de Matrizes

- A fatoração é importante para escrever a matriz $A = LU$, em que L é triangular inferior e U é triangular superior.
- Se o sistema $Ax = b$ possui a matriz fatorada na forma $A = LU$, torna-se bem mais rápido obter a solução x.
- **Teorema.** Se a Eliminação de Gauss pode ser aplicada no sistema $Ax = b$ sem que haja permuta de linhas, então a matriz A pode ser fatorada no produto de uma matriz L triangular inferior por um matriz U triangular superior, isto é, $A = LU$, onde $m_{ji} = \frac{a^i_{ji}}{a^i_{ii}}$ são coeficientes das matrizes intermediárias A^i.

$$U = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n}^{(n-1)} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ m_{n1} & \cdots & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo

- **Exemplo.** Determine a fatoração LU para a matriz A do sistema linear $Ax = b$ abaixo:

$$
\begin{aligned}
E_1 &: x_1 + x_2 + \quad + 3x_4 = 8,\\
E_2 &: 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 7,\\
E_3 &: 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 14,\\
E_4 &: -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -7.
\end{aligned}
$$

- **Resposta.** Primeiro, aplica-se a Eliminação de Gauss para obter o sistema resultante:

$$
\begin{aligned}
E_1 &: x_1 + x_2 + \quad + 3x_4 = 4,\\
E_2 &: \quad - x_2 - x_3 - 5x_4 = -7,\\
E_3 &: \qquad 3x_3 + 13x_4 = 13,\\
E_4 &: \qquad\quad -13x_4 = -13.
\end{aligned}
$$

Exemplo

- O sistema anterior permite criar a matriz U triangular superior:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix}$$

- Em seguida, calculam-se os multiplicados m_{ji} para formar a matriz L, a saber:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1 \end{bmatrix}$$

- Para obter os elementos m_{ji} de L, observa-se as submatrizes formadas pela Eliminação de Gauss a fim de obter U.
- Os elementos da coluna $i = 1$ de L são obtidos da original A;
- Os elementos da coluna $i = 2$ de L são obtidos da matriz resultante após a eliminação dos coeficientes da primeira coluna de A (seria a A^1);

Exemplo

- Os elementos da coluna $i = 3$ de L são obtidos da matriz resultante após a eliminação da segunda coluna de A (seria a A^2), e assim por diante.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{1} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{1} & \frac{-4}{-1} & 1 & 0 \\ \frac{-1}{1} & \frac{3}{-1} & \frac{0}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

- Para obter a resposta do sistema $Ax = b$, resolve-se $Ax = LUx$:

$$\mathbf{Ax} = L U\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 14 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Exemplo

- Para tanto, faz-se a substituição $y = Ux$. Então, $b = L(Ux) = Ly$, ou seja:

$$\mathbf{L}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 14 \\ -7 \end{bmatrix}$$

- O sistema resultante $Ly = b$ é resolvido para y fazendo substituição direta:

$$\begin{aligned} y_1 &= 8; & & \\ 2y_1 + y_2 &= 7, & \text{so } & y_2 = 7 - 2y_1 = -9; \\ 3y_1 + 4y_2 + y_3 &= 14, & \text{so } & y_3 = 14 - 3y_1 - 4y_2 = 26; \\ -y_1 - 3y_2 + y_4 &= -7, & \text{so } & y_4 = -7 + y_1 + 3y_2 = -26. \end{aligned}$$

Exemplo

- Por fim, resolve-se o sistema $Ux = y$ para obter x, que é a solução original do sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -9 \\ 26 \\ -26 \end{bmatrix}$$

- A partir de substituição inversa, chega-se em: $x_4 = 2$, $x_3 = 0$, $x_2 = -1$ e $x_1 = 3$.
- Em seguida será apresentado um algoritmo que permite fatorar uma matriz A de ordem $n \times n$ no produto de duas matrizes, uma L triangular inferior e outra U triangular superior, isto é, $A = LU$, onde a diagonal de L ou de U consiste apenas de valores iguais a 1 (um).

Fatoração LU

INPUT dimension n; the entries a_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$ of A; the diagonal $l_{11} = \cdots = l_{nn} = 1$ of L or the diagonal $u_{11} = \cdots = u_{nn} = 1$ of U.

OUTPUT the entries l_{ij}, $1 \leq j \leq i$, $1 \leq i \leq n$ of L and the entries, u_{ij}, $i \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq n$ of U.

Step 1 Select l_{11} and u_{11} satisfying $l_{11}u_{11} = a_{11}$.
If $l_{11}u_{11} = 0$ then OUTPUT ('Factorization impossible');
STOP.

Step 2 For $j = 2, \ldots, n$ set $u_{1j} = a_{1j}/l_{11}$; (*First row of U.*)
$l_{j1} = a_{j1}/u_{11}$. (*First column of L.*)

Fatoração LU

Step 3 For $i = 2, \ldots, n-1$ do Steps 4 and 5.

Step 4 Select l_{ii} and u_{ii} satisfying $l_{ii}u_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{ki}$.

If $l_{ii}u_{ii} = 0$ then OUTPUT ('Factorization impossible');
STOP.

Step 5 For $j = i+1, \ldots, n$

$$\text{set } u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}}\left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}\right]; \quad (\textit{ith row of } U.)$$

$$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}}\left[a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}u_{ki}\right]. \quad (\textit{ith column of } L.)$$

Step 6 Select l_{nn} and u_{nn} satisfying $l_{nn}u_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}u_{kn}$.

(*Note: If $l_{nn}u_{nn} = 0$, then $A = LU$ but A is singular.*)

Step 7 OUTPUT (l_{ij} for $j = 1, \ldots, i$ and $i = 1, \ldots, n$);
OUTPUT (u_{ij} for $j = i, \ldots, n$ and $i = 1, \ldots, n$);
STOP.

Matriz Positiva Definida

- Nas matrizes positivas definidas, a Eliminação de Gauss pode ser aplicada sem ser preciso permutar linhas.
- **Definição.** Uma matriz A é *positiva definida* se ela é simétrica ($A = A^t$) e se $x^t A x > 0$ para cada vetor n-dimensional $x \neq 0$.
- Assim, a operação $x^t A x$ resulta em um único valor que deve ser positivo, isto é:

$$\mathbf{x}^t A \mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= [x_1, x_2, \cdots, x_n] \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j \end{bmatrix} = \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \right]$$

Exemplo

- **Exemplo.** Mostre que a matriz abaixo é positiva definida.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- **Resposta.** Suponha que x seja um vetor coluna tridimensional qualquer, então:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^t A\mathbf{x} &= [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 2x_1 & - & x_2 & & \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 \\ -x_2 & + & 2x_3 & & \end{bmatrix} \\ &= 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2. \end{aligned}$$

Matriz Positiva Definida

- Rearranjando os termos, tem-se:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^t A\mathbf{x} &= x_1^2 + (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) + x_3^2\\ &= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2,\end{aligned}$$

- Que resulta em $x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 > 0$, a menos que $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
- **Teorema.** Se uma matriz A de ordem $n \times n$ é positiva definida, então:
- (i) A tem uma inversa;
- (ii) $a_{ii} > 0$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$;
- (iii) $\max_{1\leq k,j\leq n} |a_{kj}| \leq \max_{1\leq i\leq n} |a_{ii}|$;
- (iv) $(a_{ij})^2 < a_{ii}a_{jj}$, para cada $i \neq j$.

Matriz Positiva Definida

- **Teorema.** A matriz A é positiva definida se e somente se A pode ser fatorada na forma LDL^t, em que L é triangular inferior com elementos 1 (um) em sua diagonal e D é uma matriz diagonal com valores positivos na sua diagonal.

INPUT the dimension n; entries a_{ij}, for $1 \leq i, j \leq n$ of A.

OUTPUT the entries l_{ij}, for $1 \leq j < i$ and $1 \leq i \leq n$ of L, and d_i, for $1 \leq i \leq n$ of D.

Step 1 For $i = 1, \ldots, n$ do Steps 2–4.

Step 2 For $j = 1, \ldots, i-1$, set $v_j = l_{ij} d_j$.

Step 3 Set $d_i = a_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} v_j$.

Step 4 For $j = i+1, \ldots, n$ set $l_{ji} = (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} v_k)/d_i$.

Step 5 OUTPUT (l_{ij} for $j = 1, \ldots, i-1$ and $i = 1, \ldots, n$);
OUTPUT (d_i for $i = 1, \ldots, n$);
STOP.

Figura: Pseudo-código para a fatoração LDL^t.

Exemplo

- **Exemplo.** Obtenha a fatoração LDL^t da matriz positiva definida abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4.25 & 2.75 \\ 1 & 2.75 & 3.5 \end{bmatrix}$$

- **Resposta.** A fatoração LDL^t tem a entrada 1 na diagonal principal de L:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} \\ 0 & 1 & l_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} d_1 & d_1 l_{21} & d_1 l_{31} \\ d_1 l_{21} & d_2 + d_1 l_{21}^2 & d_2 l_{32} + d_1 l_{21} l_{31} \\ d_1 l_{31} & d_1 l_{21} l_{31} + d_2 l_{32} & d_1 l_{31}^2 + d_2 l_{32}^2 + d_3 \end{bmatrix}$$

Exemplo

- Então, chega-se em:

$$a_{11} : 4 = d_1 \Longrightarrow d_1 = 4, \qquad a_{21} : -1 = d_1 l_{21} \Longrightarrow l_{21} = -0.25$$

$$a_{31} : 1 = d_1 l_{31} \Longrightarrow l_{31} = 0.25, \qquad a_{22} : 4.25 = d_2 + d_1 l_{21}^2 \Longrightarrow d_2 = 4$$

$$a_{32} : 2.75 = d_1 l_{21} l_{31} + d_2 l_{32} \Longrightarrow l_{32} = 0.75, \quad a_{33} : 3.5 = d_1 l_{31}^2 + d_2 l_{32}^2 + d_3 \Longrightarrow d_3 = 1,$$

- Por fim:

$$A = LDL^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.25 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.75 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.25 & 0.25 \\ 0 & 1 & 0.75 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolução do Sistema

- O algoritmo da fatoração LDL^t permite fatorar uma matriz positiva definida A, porém ele ainda pode ser adaptado para resolver o sistema $Ax = b$.
- Neste caso, tal algoritmo continua calculando inicialmente $Ly = b$, em seguida $Dz = y$ e, finalmente, $L^t x = z$.

Step 6 Set $y_1 = b_1$.

Step 7 For $i = 2, \ldots, n$ set $y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j$.

The linear system $D\mathbf{z} = \mathbf{y}$ can then be solved by

Step 8 For $i = 1, \ldots, n$ set $z_i = y_i / d_i$.

Finally, the upper-triangular system $L^t\mathbf{x} = \mathbf{z}$ is solved with the steps given by

Step 9 Set $x_n = z_n$.

Step 10 For $i = n-1, \ldots, 1$ set $x_i = z_i - \sum_{j=i+1}^{n} l_{ji} x_j$.

Step 11 OUTPUT (x_i for $i = 1, \ldots, n$);
STOP.

Figura: Pseudo-código para a fatoração LDL^t resolver um sistema $Ax = b$.