Mestrado em Modelagem e Otimização - RC/UFG

Modelagem Computacional

Aula 4[2]

Prof. Thiago Alves de Queiroz

[2] [Cap. 5] BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. Numerical Analysis (9th ed). Cengage Learning, 2010.

Problemas de Valor Inicial

- O movimento de um pêndulo livre pode ser descrito pela *Equação Diferencial Ordinária* de segunda ordem $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin(\theta) = 0$.
- Um *problema de valor inicial* surge ao especificar a posição do pêndulo quando o movimento se inicia, $\theta(t_0) = \alpha_1$, e sua velocidade neste ponto, $\theta'(t_0) = \alpha_2$.
- Com a hipótese de pequeno valores para θ, tem-se que $\theta \approx \sin(\theta)$ e o problema, sendo linear, pode ser resolvido exatamente.
- Quando $\theta \approx \sin(\theta)$ não se aplica, acaba sendo preciso recorrer a um método numérico.

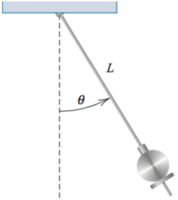

Figura: Pêndulo de comprimento L, $g \approx 9,82 m/s^2$ e ângulo θ com a vertical.

Problemas de Valor Inicial

- Equações diferenciais modelam problemas nas ciências e engenharias que envolvem a mudança de alguma variável com respeito a outra.
- Muitos problemas requerem a solução de *problemas de valor inicial* cujas equações diferenciais são complicadas de serem resolvidas exatamente.
- O uso de métodos numéricos para resolver essas equações fornece soluções aproximadas em certos valores.
- **Definição.** Uma função $f(t, y)$ satisfaz a *condição de Lipschitz* na variável y em um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$, se existe uma constante $L > 0$ com

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \tag{1}$$

para quaisquer (t, y_1) e (t, y_2) em D.
- A constante L na definição anterior é chamada de **constante de Lipschitz** para f.

Exemplo

- **Exemplo.** Verifique que $f(t, y) = t|y|$ atende a condição de Lipschitz no intervalo $D = \{(t, y)|1 \leq t \leq 2 \text{ e } -3 \leq y \leq 4\}$.
- **Resposta.** Para cada par de pontos (t, y_1) e (t, y_2) em D, tem-se:
  $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| =$
  $= |t|y_1| - t|y_2|| =$
  $= |t||y_1| - |y_2| \leq 2|y_1 - y_2|$.
- Note que o valor $L = 2$ é um valor para a constante de Lipschitz, pois por exemplo:
  $|f(2, 1) - f(2, 0)| = |2 - 0| = 2|1 - 0|$.
- O mesmo se aplica para outros valores de t e y.

Problemas de Valor Inicial

- **Definição.** Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ é dito convexo se para quaisquer (t, y_1) e (t, y_2) em D, então $((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2,\ (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2)$ pertence a D para qualquer $\lambda \in [0, 1]$.
- Ou seja, um conjunto é convexo se para quaisquer dois pontos dentro do conjunto, o segmento de reta com extremo nesses pontos também está contido no conjunto.

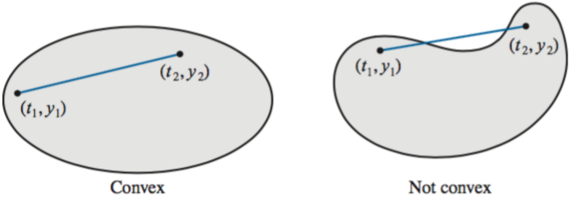

Figura: Conjunto convexo a esquerda e não convexo a direita.

Problemas de Valor Inicial

- **Teorema.** Suponha que $f(t, y)$ é definida no conjunto convexo $D \subset \mathbb{R}^2$. Se existe uma constante $L > 0$ com

$$\left|\frac{\partial f(t, y)}{\partial y}\right| \leq L, \text{ para todo } (t, y) \in D, \tag{2}$$

  então f satisfaz a condição de Lipschitz em D na variável y com constante de Lipschitz L.

- **Teorema.** Suponha que $D = \{(t, y) | a \leq t \leq b \text{ e } -\infty < y < \infty\}$ e que $f(t, y)$ é contínua em D. Se f satisfaz a condição de Lipschitz em D na variável y, então o problema de valor inicial:

$$y'(t) = f(t, y), \; a \leq t \leq b, \; y(a) = \alpha, \tag{3}$$

  tem solução única $y(t)$ para $a \leq t \leq b$.

Exemplo

- **Exemplo.** Verifique que o problema de valor inicial abaixo tem solução única:
  $y' = 1 + t\sin(ty),\ 0 \le t \le 2,\ y(0) = 0.$
- **Resposta.** Considera-se t constante e aplica-se o Teorema do Valor Médio[3] em $f(t, y)$.
- Com isso, percebe-se que quando $y_1 < y_2$ existe um número $\xi \in (y_1, y_2)$ com:
  $\frac{f(t,y_2)-f(t,y_1)}{y_2-y_1} = \frac{\partial}{\partial y} f(t, \xi) = t^2 \cos(\xi t)$.
- Então: $|f(t, y_2) - f(t, y_1)| = |y_2 - y_1||t^2 \cos(\xi t)| \le 4|y_2 - y_1|$.
- Note que f satisfaz a condição de Lipschitz na variável y com constante $L = 4$.
- Além disso, $f(t, y)$ é contínua em $0 \le t \le 2$ e $-\infty < y < \infty$, tal que existe uma única solução para esse problema de valor inicial.

[3] Seja f contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b), então existe um número $c \in (a, b)$ com $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Problemas Bem-Postos

- **Definição.** O problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y),\ a \leq t \leq b,\ y(a) = \alpha, \tag{4}$$

é bem definido se:

  - Existe uma solução única $y(t)$ para o problema;
  - Existem constantes $\epsilon_0 > 0$ e $k > 0$, tais que para qualquer ϵ, com $\epsilon_0 > \epsilon > 0$, tem-se $\delta(t) < \epsilon$ é contínuo para todo $t \in [a, b]$, e quando $|\delta_0| < \epsilon$, o problema:

$$\frac{dz}{dt} = f(t, z) + \delta(t),\ a \leq t \leq b,\ z(a) = \alpha + \delta_0, \tag{5}$$

  tem solução única $z(t)$ que satisfaz $|z(t) - y(t)| < k\epsilon$ para todo $t \in [a, b]$.

- O problema (5) é chamado de *problema perturbado*.
- Métodos numéricos acabam resolvendo problemas perturbados devido aos erros de arredondamento inseridos que então perturbam o problema original.

Problemas Bem-Postos

- **Teorema.** Suponha que $D = \{(t, y) | a \leq t \leq b$ e $-\infty < y < \infty\}$. Se f é contínua e satisfaz a condição de Lipschitz em D na variável y, então o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \; a \leq t \leq b, \; y(a) = \alpha, \tag{6}$$

  é bem-posto.
- **Exemplo.** Mostre que o problema de valor inicial na eq. (7) é bem-posto em $D = \{(t, y) | 0 \leq t \leq 2$ e $-\infty < y < \infty\}$.

$$\frac{dy}{dt} = y - t^2 + 1, \; 0 \leq t \leq 2, \; y(0) = 0,5. \tag{7}$$

- **Resposta.** Observa-se que D é um conjunto convexo, tal que: $|\frac{\partial}{\partial y} f(t, y)| = |1| = 1$.
- Então pelo teorema, tem-se que $f(t, y)$ atende a condição de Lipschitz em D na variável y com constante de Lipschitz $L = 1$.
- Além disso, como f é contínua em D, tem-se pelo teorema anterior que o problema é bem-posto.

Método de Euler

- É a técnica mais elementar para aproximar problemas de valor inicial, sendo raramente usada na prática.
- A aproximação para a solução $y(t)$ vai ser gerada em vários valores, uma malha de pontos, de um intervalo $[a, b]$.
- Estipula-se que os pontos da malha estão igualmente espaçados, isto é, dado um inteiro positivo N, tem-se:

$$t_i = a + ih, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, N. \tag{8}$$

- A distância entre os pontos $h = \frac{b-a}{N} = t_{i+1} - t_i$ é chamada de *tamanho do passo*.
- O método de Euler é derivado a partir do Teorema de Taylor de ordem 1 para algum $\xi \in (t_i, t_{i+1})$:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1} - t_i)y'(t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2} y''(\xi_i) \tag{9}$$

Método de Euler

- Como $h = t_{i+1} - t_i$ e $y'(t) = \frac{dy}{dt} = f(t, y)$, tem-se:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_i). \tag{10}$$

- O método de Euler obtém $w_i \approx y(t_i)$, para cada $i = 1, 2, \ldots, N$, da seguinte forma:

$$w_0 = \alpha, \tag{11}$$

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i), \text{ para cada } i = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{12}$$

- A equação (12) é chamada de *equação de diferenças* associada ao método de Euler.

Método de Euler

- A interpretação geométrica do método de Euler sugere que quando w_i é uma aproximação para $y(t_i)$, tem-se que $f(t_i, w_i) \approx y'(t_i) = f(t_i, y(t_i))$.

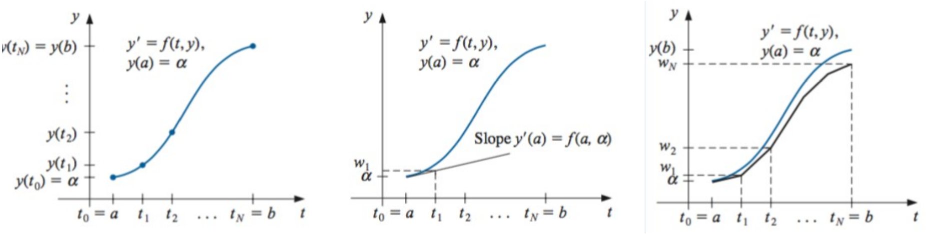

Figura: Interpretação geométrica do método de Euler.

Método de Euler

INPUT endpoints a, b; integer N; initial condition α.

OUTPUT approximation w to y at the $(N+1)$ values of t.

Step 1 Set $h = (b - a)/N$;
$t = a$;
$w = \alpha$;
OUTPUT (t, w).

Step 2 For $i = 1, 2, \ldots, N$ do Steps 3, 4.

Step 3 Set $w = w + hf(t, w)$; (*Compute* w_i.)
$t = a + ih$. (*Compute* t_i.)

Step 4 OUTPUT (t, w).

Step 5 STOP.

Figura: Pseudo-código do método de Euler.

Exemplo

- **Exemplo.** Resolva o problema de valor inicial abaixo pelo método de Euler para $h = 0,5$ e $t = 2$.

$$y' = y - t^2 + 1, \ 0 \leq t \leq 2, \ y(0) = 0,5. \tag{13}$$

- **Resposta.** Sabendo que $f(t, y) = y - t^2 + 1$, então:
  $w_0 = y(0) = 0,5,$
  $w_1 = w_0 + 0,5(w_0 - (0)2 + 1) = 0,5 + 0,5(1,5) = 1,25,$
  $w_2 = w_1 + 0,5(w_1 - (0,5)2 + 1) = 1,25 + 0,5(2,0) = 2,25,$
  $w_3 = w_2 + 0,5(w_2 - (1,0)2 + 1) = 2,25 + 0,5(2,25) = 3,375,$
  $w_4 = w_3 + 0,5(w_3 - (1,5)2 + 1) = 3,375 + 0,5(2,125) = 4,4375.$
- Então, $y(2) \approx w_4 = 4,4375.$

Erro no Método de Euler

- **Teorema.** Suponha que f é contínua e satisfaz a condição de Lipschitz com constante L em $D = \{(t,y) | a \leq t \leq b \text{ e } -\infty < y < \infty\}$ e que existe uma constante M com $|y''(t)| \leq M$, para todo $t \in [a,b]$, em que $y(t)$ denota a solução única do problema de valor inicial $y' = f(t,y),\ a \leq t \leq b,\ y(a) = \alpha$. Seja $w_0, w_1, \ldots, w_N$ as aproximações geradas pelo método de Euler. Então, para cada $i = 0, 1, \ldots, N$:

$$|y(t_i) - w_i| \leq \frac{hM}{2L}\left[e^{L(t_i - a)} - 1\right]. \tag{14}$$

- A desvantagem desse teorema é a necessidade de um limitante para a segunda derivada da solução.
- Uma alternativa, sabendo que a solução tem derivadas parciais, é:

$$y''(t) = \frac{\partial f(t,y(t))}{\partial t} + f(t,y(t))\frac{\partial f(t,y(t))}{\partial y}. \tag{15}$$

Exemplo

- **Exemplo.** A solução do problema de valor inicial $y' = y - t^2 + 1,\ 0 \leq t \leq 2,\ y(0) = 0,5$ para $h = 0,2$ tem aproximação pelo método de Euler em $t_1 = 0,2$ de $w_1 = 0,8$. Encontre um limitante para o erro de aproximação por w_1 e compare com o erro real. A solução exata do problema é $y(t) = (t+1)^2 - 0,5e^t$.
- **Resposta.** Como f tem $\frac{\partial f(t,y)}{\partial y} = 1$, chega-se na constante de Lipschitz $L = 1$.
- A partir da solução exata $y(t)$, tem-se $y''(t) = 2 - 0,5e^t$, tal que: $|y''(t)| \leq 0,5e^2 - 2$ para todo $t \in [0,2]$.
- Como existe $L = 1$ e $M = 0,5e^2 - 2$, tem-se pelo teorema anterior que o limitante para o erro é: $|y_i - w_i| \leq 0,1(0,5e^2 - 2)(e^{t_i} - 1)$.
- Para w_1, tem-se o seguinte limitante para o erro: $|y(0,2) - w_1| \leq 0,1(0,5e^2 - 2)(e^{0,2} - 1) = 0,03752$.
- Por outro lado, o erro absoluto real é: $|y(0,2) - w_1| = |0,8292986 - 0,8| = 0,0292986$.

Método de Taylor de Alta Ordem

- Os métodos numéricos buscam aproximações precisas com mínimo esforço para tal.
- Uma forma de comparar os diferentes métodos é com base no *erro de truncamento local*.
- Esse erro, em um dado passo h, mede a quantidade pela qual a solução da equação diferencial falha em satisfazer a equação de diferenças sendo usada para a aproximação.
- **Definição.** O método de diferenças:

$$w_0 = \alpha, \tag{16}$$

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i), \text{ para cada } i = 0, 1, \dots, N-1. \tag{17}$$

tem *erro de truncamento local*:

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y_{i+1} - (y_i + h\phi(t_i, y_i))}{h} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \phi(t_i, y_i), \tag{18}$$

para cada $i = 0, 1, \dots, N-1$, em que y_i e y_{i+1} denotam a solução em t_i e t_{i+1}, respectivamente.

Método de Taylor de Alta Ordem

- O método de Euler tem erro de truncamento local no i-ésimo passo h dado por:

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - f(t_i, y_i), \tag{19}$$

  para cada $i = 0, 1, \ldots, N-1$.
- Esse erro é local, pois mede a precisão do método no dado passo específico assumindo que o método foi exato nos passos anteriores.
- O erro de truncamento local do método de Euler é $O(h)$.
- Como o método de Euler foi derivado usando o teorema de Taylor de ordem $n = 1$, uma forma de melhorar a convergência é considerar ordens mais altas ($n > 1$).
- Essa abordagem requer que a solução do problema de valor inicial tenha $(n+1)$ derivadas contínuas.
- Dessa forma, o erro de trucamento local passa a ser da ordem $O(h^n)$.

Método de Taylor de Alta Ordem

- Assim, o método de Taylor de ordem n para resolver um problema de valor inicial é dado por:

$$w_0 = \alpha, \tag{20}$$

$$w_{i+1} = w_i + hT^{(n)}, \text{ para cada } i = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{21}$$

sendo:

$$T^{(n)}(t_i, w_i) = f(t_i, w_i) + \frac{h}{2} f'(t_i, w_i) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{n!} f^{(n-1)}(t_i, w_i). \tag{22}$$

- **Exemplo.** Aplique o método de Taylor de ordem 2 para o problema de valor inicial abaixo com $h = 0,5$ e $t = 2$: $y' = y - t^2 + 1, \; 0 \leq t \leq 2, \; y(0) = 0,5.$
- **Resposta.** Para o método de ordem 2 é preciso a primeira derivada de $f(t, y(t)) = y(t) - t^2 + 1$ com respeito a variável t.

Exemplo

- Como $y' = y - t^2 - 1$, tem-se que:
  $f'(t, y(t)) = \frac{d}{dt}(y - t^2 + 1) = y' - 2t = y - t^2 - 1 - 2t$.
- Segue que:
  $T^{(2)}(t_i, w_i) = f(t_i, w_i) + \frac{h}{2} f'(t_i, w_i) = w_i - t_i^2 + 1 + \frac{h}{2}(w_i - t_i^2 + 1 - 2t_i) =$
  $= \left(1 + \frac{h}{2}\right)(w_i - t_i^2 + 1) - ht_i$.
- Logo, escreve-se o método de segunda ordem como:

$$w_0 = 0,5, \tag{23}$$

$$w_{i+1} = w_i + h\left[\left(1 + \frac{h}{2}\right)(w_i - t_i^2 + 1) - ht_i\right]. \tag{24}$$

- Para $t_1 = 0,5$, $t_2 = 1$, $t_3 = 1,5$ e $t_4 = 2$, tem-se respectivamente:
  $w_1 = w_0 + 0,5\left[\left(1 + \frac{0,5}{2}\right)(w_0 - (0,5)^2 + 1) - 0,5(0,5)\right] = 1,437500,$
  $w_2 = w_1 + 0,5\left[\left(1 + \frac{0,5}{2}\right)(w_1 - (1)^2 + 1) - 0,5(1)\right] = 2,679688,$
  $w_3 = w_2 + 0,5\left[\left(1 + \frac{0,5}{2}\right)(w_2 - (1,5)^2 + 1) - 0,5(1,5)\right] = 4,104492,$
  $w_4 = w_3 + 0,5\left[\left(1 + \frac{0,5}{2}\right)(w_3 - (2)^2 + 1) - 0,5(2)\right] = 5,513550.$

Método de Runge-Kutta

- O método de Taylor tem a vantagem do erro de truncamento local ser de alta ordem, porém precisa das derivadas da função.
- O método de Runge-Kutta tem a mesma vantagem do método de Taylor, porém não precisa das derivadas da função.
- A obtenção de um método de Runge-Kutta requer valores a_1, α_1 e β_1 tal que $a_1 f(t + \alpha_1, y + \beta_1)$ aproxima de, com erro da ordem $O(h^2)$:

$$T^{(2)}(t, y) = f(t, y) + \frac{h}{2} f'(t, y), \tag{25}$$

- Assim: $T^{(2)}(t, y) = f(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t, y)) - R_1(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t, y))$,
- Ao considerar $T^{(2)}$ como definido acima no método de Taylor de ordem 2, obtém-se o método de Runge-Kutta conhecido como *método do Ponto Médio*.

Método de Runge-Kutta

- Formas mais complicadas são necessárias para métodos de Taylor de alta ordem.
- A forma que usa quatro parâmetros para aproximar $T^{(3)}(t, y) = f(t, y) + \frac{h}{2}f'(t, y) + \frac{h^2}{6}f''(t, y)$ é:

$$a_1 f(t, y) + a_2 f(t + \alpha_2, y + \delta_2 f(t, y)). \tag{26}$$

- Um método que pode ser obtido a partir do uso de $T^{(3)}(t, y)$ é o *método de Euler Modificado*:

$$w_0 = \alpha, \tag{27}$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_i + hf(t_i, w_i))\right], \text{ para } i = 0, 1, \ldots, N - 1. \tag{28}$$

com erro da ordem $O(h^2)$.

Exemplo

- **Exemplo.** Aplique o método de Euler Modificado no problema de valor inicial adiante com $h = 0,5$ e $t = 2$:
  $y' = y - t^2 + 1, \ 0 \leq t \leq 2, \ y(0) = 0,5.$
- **Resposta.** Para $t_0 = 0$, tem-se $w_0 = 0,5$.
- Enquanto que para $t_i = 0,5; 1; 1,5$ e 2, tem-se:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}[(w_i - (t_i)^2 + 1) +$$
$$+ ((w_i + h((w_i - (t_i)^2 + 1))) - (t_{i+1})^2 + 1)].$$

que resulta em:

$$w_1 = w_0 + \tfrac{0,5}{2}[(w_0 - (0)^2 + 1) + ((w_0 + 0,5((w_0 - (0)^2 + 1))) - (0,5)^2 + 1)] = 1,375000,$$
$$w_2 = w_1 + \tfrac{0,5}{2}[(w_1 - (0,5)^2 + 1) + ((w_1 + 0,5((w_1 - (0,5)^2 + 1))) - (1)^2 + 1)] = 2,515625,$$
$$w_3 = w_2 + \tfrac{0,5}{2}[(w_2 - (1)^2 + 1) + ((w_2 + 0,5((w_2 - (1)^2 + 1))) - (1,5)^2 + 1)] = 3,775391,$$
$$w_4 = w_3 + \tfrac{0,5}{2}[(w_3 - (1,5)^2 + 1) + ((w_3 + 0,5((w_3 - (1,5)^2 + 1))) - (2)^2 + 1)] = 4,916260.$$

Método de Runge-Kutta de Alta Ordem

- O termo de quarta ordem $T^{(4)}(t, y)$ pode ser aproximado com erro $O(h^4)$ por uma expansão que envolve 12 parâmetros.
- Essa expansão resulta no tradicional método de *Runge-Kutta de Quarta Ordem*, para cada $i = 0, 1, \ldots, N-1$:

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \alpha, \\
k_1 &= hf(t_i, w_i), \\
k_2 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_1\right), \\
k_3 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_2\right), \\
k_4 &= hf\left(t_{i+1}, w_i + k_3\right), \\
w_{i+1} &= w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).
\end{aligned}
$$

Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem

INPUT endpoints a, b; integer N; initial condition α.

OUTPUT approximation w to y at the $(N+1)$ values of t.

Step 1 Set $h = (b-a)/N$;
$t = a$;
$w = \alpha$;
OUTPUT (t, w).

Step 2 For $i = 1, 2, \ldots, N$ do Steps 3–5.

Step 3 Set $K_1 = hf(t, w)$;
$K_2 = hf(t + h/2, w + K_1/2)$;
$K_3 = hf(t + h/2, w + K_2/2)$;
$K_4 = hf(t + h, w + K_3)$.

Step 4 Set $w = w + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6$; (*Compute* w_i.)
$t = a + ih$. (*Compute* t_i.)

Step 5 OUTPUT (t, w).

Step 6 STOP.

Figura: Pseudo-código do método de Runge-Kutta de quarta ordem.

Exemplo

- **Exemplo.** Aplique o método de Runge-Kutta de quarta ordem no problema de valor inicial adiante com $h = 0,5$ e $t = 2$: $y' = y - t^2 + 1,\ 0 \leq t \leq 2,\ y(0) = 0,5.$
- **Resposta.** Para $t_0 = 0$, tem-se $w_0 = 0,5$.
- Enquanto que para $t_1 = 0,5$, tem-se:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= 0,5f(0, w_0) = 0,75000,\\
k_2 &= 0,5f\left(0 + \frac{0,5}{2}, w_0 + \frac{1}{2}k_1\right) = 0,90625,\\
k_3 &= 0,5f\left(0 + \frac{0,5}{2}, w_0 + \frac{1}{2}k_2\right) = 0,94531,\\
k_4 &= 0,5f\left(0,5, w_0 + k_3\right) = 1,0977,\\
w_1 &= w_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1,425130.
\end{aligned}
$$

Exemplo

- Para $t_2 = 1$, tem-se:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= 0,5f(0,5,w_1) = 1,0876,\\
k_2 &= 0,5f\left(0,5 + \frac{0,5}{2}, w_1 + \frac{1}{2}k_1\right) = 1,2032,\\
k_3 &= 0,5f\left(0,5 + \frac{0,5}{2}, w_1 + \frac{1}{2}k_2\right) = 1,2321,\\
k_4 &= 0,5f\left(1, w_1 + k_3\right) = 1,3286,\\
w_2 &= w_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 2,639603.
\end{aligned}
$$

Exemplo

- Para $t_3 = 1,5$, tem-se:

$$\begin{aligned}
k_1 &= 0,5f(1, w_2) = 1,3198,\\
k_2 &= 0,5f\left(1 + \frac{0,5}{2}, w_2 + \frac{1}{2}k_1\right) = 1,3685,\\
k_3 &= 0,5f\left(1 + \frac{0,5}{2}, w_2 + \frac{1}{2}k_2\right) = 1,3807,\\
k_4 &= 0,5f\left(1,5, w_2 + k_3\right) = 1,3851,\\
w_3 &= w_2 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 4,006819.
\end{aligned}$$

Exemplo

- Para $t_4 = 2$, tem-se:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= 0,5f(1,5,w_3) = 1,3784,\\
k_2 &= 0,5f\left(1,5+\frac{0,5}{2}, w_3+\frac{1}{2}k_1\right) = 1,3168,\\
k_3 &= 0,5f\left(1,5+\frac{0,5}{2}, w_3+\frac{1}{2}k_2\right) = 1,3013,\\
k_4 &= 0,5f\left(2, w_3+k_3\right) = 1,1541,\\
w_4 &= w_3 + \frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4) = 5,301605.
\end{aligned}
$$

- Sabendo que a solução exata é $y(t) = (t+1)^2 - 0,5e^t$, tem-se $y(2) = 5,3054720$.
- O erro absoluto da aproximação é dado por $|y(2) - w_4| = 0,0038670$.