Mestrado em Modelagem e Otimização - RC/UFG

Modelagem Computacional

Parte 3[2]

Prof. Thiago Alves de Queiroz

[2][Cap. 4] BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. Numerical Analysis (9th ed). Cengage Learning, 2010.

Diferenciação Numérica

- Grande parte dos métodos para aproximar derivadas e integrais usam polinômios;
- A derivada da função f em x_0 é:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{1}$$

- Um ponto de partida para gerar uma aproximação para $f'(x_0)$ é calcular, para um pequeno valor de h:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{2}$$

- Seja $x_0 \in (a, b)$ e f, f' e f'' contínuas em $[a, b]$, tal que $x_1 = x_0 + h$ é um valor suficientemente pequeno para $h \neq 0$ e $x_1 \in [a, b]$. Assim:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi). \tag{3}$$

Diferenciação Numérica

- A fórmula (3) é chamada de *fórmula da diferença superior* quando $h > 0$.
- No caso de $h < 0$, tem-se a *fórmula da diferença inferior*.

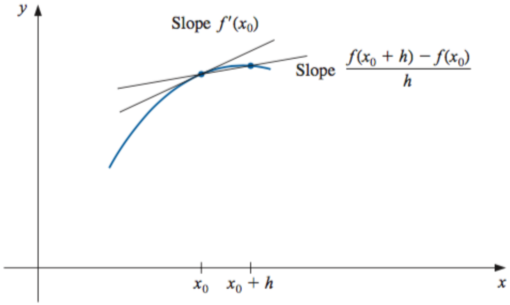

Figura: Fórmula da diferença superior.

Exemplo

- **Exemplo.** Use a fórmula da diferença superior para aproximar $f(x) = \ln(x)$ em $x_0 = 1,8$ usando $h = 0,1$, $h = 0,05$ e $h = 0,01$. Determine os erros.
- **Resposta.** Aplicando a fórmula, tem-se: $\frac{f(1{,}8+h)-f(1{,}8)}{h} = \frac{ln(1{,}8+h)-ln(1{,}8)}{h}$.
- Para determinar o erro, sabendo que $f''(x) = \frac{-1}{x^2}$, faz-se: $\frac{|hf''(\xi)|}{2} = \frac{|h|}{2\xi^2}$ para $x_0 < \xi < x_0 + h$. Assim: $\frac{|h|}{2\xi^2} < \frac{|h|}{2x_0^2}$.
- Para $h = 0,1$: $\frac{0{,}64185389-0{,}58778667}{0{,}1} = 0,5406722$ com erro $\frac{|h|}{2x_0^2} = \frac{|0{,}1|}{2(1{,}8)^2} = 0,0154321$.
- Para $h = 0,05$: $\frac{0{,}61518564-0{,}58778667}{0{,}05} = 0,5479794$ com erro $\frac{|h|}{2x_0^2} = \frac{|0{,}05|}{2(1{,}8)^2} = 0,0077160$.
- Para $h = 0,01$: $\frac{0{,}59332685-0{,}58778667}{0{,}01} = 0,5540180$ com erro $\frac{|h|}{2x_0^2} = \frac{|0{,}01|}{2(1{,}8)^2} = 0,0015432$.

Diferenciação Numérica

- A partir da aplicação do polinômio interpolador $P(x)$, chega-se na fórmula de $(n+1)$ pontos para aproximar $f'(x)$:

$$f'(x_j) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L'_k(x_j) + \frac{f^{n+1}(\xi(x_j))}{(n+1)!} \prod_{k=0, k\neq j}^{n} (x_j - x_k), \quad (4)$$

  sendo que $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ são $(n+1)$ pontos distintos no intervalo I e que as derivadas de f (pelo menos até a $(n+1)$-ésima) são contínuas em I.
- As fórmulas mais comuns envolvem 3 ou 5 pontos, devido ao número de avaliações e crescimento do erro de truncamento.
- A *fórmula de três pontos* centrada é dada por:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] - \frac{h^2}{6} f'''(\xi), \quad (5)$$

  em que $x_0 - h < \xi < x_0 + h$ e o erro é da ordem $O(h^2)$.

Fórmula de Três Pontos

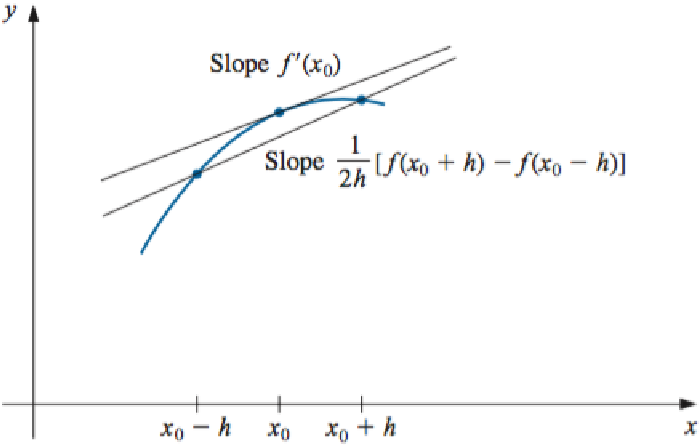

Figura: Aproximação pela fórmula de três pontos centrada.

Fórmula de Cinco Pontos

- Envolvem a avaliação da função em mais dois pontos adicionais. Assim, a *fórmula de cinco pontos* centrada:

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}\left[f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h)\right] + \frac{h^4}{30}f^5(\xi), \quad (6)$$

  em que $x_0 - 2h < \xi < x_0 + 2h$ e o erro é da ordem $O(h^4)$.

- **Exemplo.** Aproxime $f(x) = xe^x$ pelas fórmulas de três e cinco pontos considerando $h = 0,1$, $x_0 = 2$ e $f(1,8) = 10,889365$, $f(1,9) = 12,703199$, $f(2) = 14,778112$, $f(2,1) = 17,148957$ e $f(2,2) = 19,855030$.

- **Resposta.** Aplicando na fórmula de três pontos:
  $f'(x_0) \approx \frac{1}{2h}[f(x_0+h) - f(x_0-h)] = \frac{1}{0,2}[f(2,1) - f(1,9)] =$
  $= 5(17,148957 - 12,7703199) = 22,228790.$

Exemplo

- Aplicando na fórmula de cinco pontos:
  $f'(x_0) \approx \frac{1}{12h}[f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)] =$
  $= \frac{1}{1{,}2}[f(1,8) - 8f(1,9) + 8f(2,1) - f(2,2)]$
  $= \frac{1}{1{,}2}[10,889365 - 8(12,703199) + 8(17,148957) - 19,855030] =$
  $= 22,166999.$
- Sabendo que o valor exato é $f'(2) = (2+1)e^2 = 22,167168$, tem-se os erros absoluto abaixo.
- O erro para a fórmula de três pontos:
  $|22,167168 - 22,228790| = 0,061622.$
- O erro para a fórmula de cinco pontos:
  $|22,167168 - 22,166999| = 0,000169.$

Fórmula para Derivadas de Ordem 2

- A obtenção da fórmula ocorre a partir do polinômio de Taylor de ordem 3.
- A fórmula centrada para a segunda derivada é então:

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left[f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)\right] + \frac{h^2}{12} f^4(\xi), \qquad (7)$$

  em que $x_0 - h < \xi < x_0 + h$ e o erro é da ordem $O(h^2)$.
- **Exemplo.** Calcule a aproximação para $f''(2)$ sabendo que $f(x) = xe^x$, $h = 0,1$ e $f(1,9) = 12,703199$, $f(2) = 14,778112$ e $f(2,1) = 17,148957$.
- **Resposta.** Aplicando a fórmula para a derivada de ordem 2:
  $f''(2) \approx \frac{1}{0,1^2}[f(1,9) - 2f(2) + f(2,1)] =$
  $= 100[12,703199 - 2(14.778112) + 17,148957] = 29,593200.$

Integração Numérica

- Existem integrais sem antiderivadas conhecidas, daí a necessidade de calcular numericamente a integral definida.
- O método básico envolve aproximar $\int_a^b f(x)dx$ usando a *quadratura numérica* baseada na soma $\sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$.
- Os métodos do tipo quadratura seguem dos polinômios interpoladores, com a ideia de selecionar pontos distintos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ no intervalo $[a, b]$.
- A *regra do trapézio* e de *Simpson* partem dos polinômios primeiro e segundo de Lagrange com pontos igualmente espaçados, sabendo que:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) \tag{8}$$

com erro: $E(f) = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^n (x - x_i) f^{n+1}(\xi(x))dx$.

Regra do Trapézio

- Seja $x_0 = a$, $x_1 = b$ e $h = b - a = x_1 - x_0$, então a *regra do Trapézio* é:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] - \frac{h^3}{12}f''(\xi). \tag{9}$$

- A regra dá um resultado exato quando a segunda derivada de f é nula.

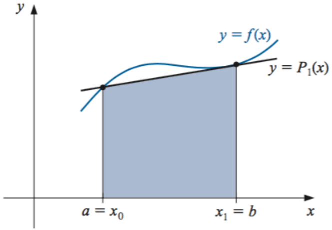

Figura: A integral é aproximada pela área de um trapézio.

Regra de Simpson

- Seja $x_0 = a$, $x_2 = b$, $x_1 = a + h$ e $h = \frac{b-a}{2}$, então a *regra de Simpson* é:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] - \frac{h^5}{90}f^4(\xi). \qquad (10)$$

- A regra dá um resultado exato quando a quarta derivada de f é nula.

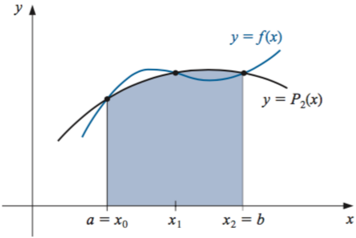

Figura: Aproximação da integral pela regra de Simpson.

Exemplo

- **Exemplo.** Compare as regras do Trapézio e de Simpson para aproximar $\int_0^2 x^2 dx$.
- **Resposta.** No intervalo $[0, 2]$, as regras possuem a fórmula:
  Trapézio: $\int_0^2 f(x)dx \approx \frac{1}{2}[f(0) + f(2)]$,
  Simpson: $\int_0^2 f(x)dx \approx \frac{1}{3}[f(0) + 4f(1) + f(2)]$.
- Ao considerar que $f(x) = x^2$, tem-se:
  Trapézio: $\int_0^2 x^2 dx \approx \frac{1}{2}[0^2 + 2^2] = 2$,
  Simpson: $\int_0^2 x^2 dx \approx \frac{1}{3}[0^2 + 4(1^2) + 2^2] = \frac{8}{3}$.
- O valor exato é $\int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}$ que coincide com a regra de Simpson.
- A regra de Simpson é ligeiramente superior a regra do Trapézio.

Fórmula de Newton-Cotes fechada

- A fórmula de Newton-Cotes fechada para $(n+1)$ pontos usa $x_i = x_0 + ih$ para $i = 0, 1, \ldots, n$, sendo $x_0 = a$, $x_n = b$ e $h = \frac{b-a}{n}$.
- A fórmula é da forma: $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$ com $a_i = \int_{x_0}^{x_n} L_i(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} dx$.
- Para $n = 3$, com $x_0 < \xi < x_3$, tem-se:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] - \frac{3h^5}{80} f^4(\xi). \tag{11}$$

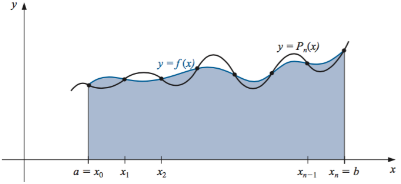

Figura: Fórmula de Newton-Cotes fechada inclui os extremos a e b.

Fórmula de Newton-Cotes aberta

- A fórmula de Newton-Cotes aberta não usa os extremos do intervalo $[a, b]$, mas sim valores no intervalo aberto (a, b).
- A fórmula usa $x_i = x_0 + ih$, para $i = 0, 1, \dots, n$, sendo $x_0 = a + h$, $x_n = b - h$ e $h = \frac{b-a}{n+2}$.
- A fórmula é definida conforme a versão fechada. Para $n = 3$, com $x_{-1} = a < \xi < x_4 = b$, tem-se:

$$\int_{x_{-1}}^{x_4} f(x)dx = \frac{5h}{24}\left[11f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + 11f(x_3)\right] - \frac{95h^5}{144} f^4(\xi). \quad (12)$$

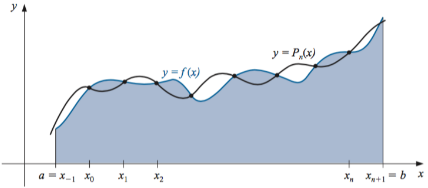

Figura: Fórmula de Newton-Cotes aberta não inclui os extremos a e b.

Exemplo

- **Exemplo.** Compare as fórmulas fechada e aberta de Newton-Cotes para $n = 3$ ao aproximar $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)dx = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,29289322.$
- **Resposta.** Usando as fórmulas de Newton-Cotes para $n = 3$, tem-se:
  Fechada:
  $\frac{3(\frac{\pi}{12})}{8}[\sin(0) + 3\sin(\frac{\pi}{12}) + 3\sin(\frac{\pi}{6}) + \sin(\frac{\pi}{4})] \approx 0,29291070,$
  Aberta:
  $\frac{5(\frac{\pi}{20})}{24}[11\sin(\frac{\pi}{20}) + \sin(\frac{\pi}{10}) + \sin(\frac{3\pi}{20}) + 11\sin(\frac{\pi}{5})] \approx 0,29286923.$
- Os erros absolutos são:
  Fechada: $|0,29289322 - 0,29291070| = 0,00001748,$
  Aberta: $|0,29289322 - 0,29286923| = 0,00002399.$

Integração Numérica Composta

- A fórmula de Newton-Cotes não é adequada para integração sobre intervalos grandes.
- É possível usar fórmulas de Newton-Cotes de baixa ordem para aproximar sub-intervalos.
- Para uma integral arbitrária $\int_a^b f(x)dx$, escolhe-se um inteiro n para subdividir o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos.
- Em seguida, aplica-se a regra escolhida em cada par de subintervalos consecutivos.

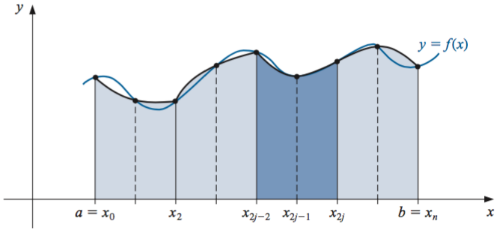

Figura: Regra de Simpson Composta para n subintervalos.

Regra de Simpson Composta

- **Teorema.** Seja f, f', f'', f''' e f^4 contínuas em $[a, b]$, n um inteiro par, $h = \frac{b-a}{n}$ e $x_j = a + jh$, para $j = 0, 1, \ldots, n$. Existe $\mu \in (a, b)$ que permite escrever a *regra de Simpson Composta* para n subintervalos como:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[f(a) + 2\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2j}) + \\ + 4\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2j-1}) + f(b)] - \frac{b-a}{180}h^4 f^4(\mu). \quad (13)$$

  em que o erro é da ordem $O(h^4)$.
- Essa abordagem por subdivisão do intervalo de integração pode ser aplicada considerando qualquer fórmula de Newton-Cotes.

Regra de Simpson Composta

INPUT endpoints a, b; even positive integer n.

OUTPUT approximation XI to I.

Step 1 Set $h = (b - a)/n$.

Step 2 Set $XI0 = f(a) + f(b)$;
$XI1 = 0$; (*Summation of* $f(x_{2i-1})$.)
$XI2 = 0$. (*Summation of* $f(x_{2i})$.)

Step 3 For $i = 1, \ldots, n-1$ do Steps 4 and 5.

Step 4 Set $X = a + ih$.

Step 5 If i is even then set $XI2 = XI2 + f(X)$
else set $XI1 = XI1 + f(X)$.

Step 6 Set $XI = h(XI0 + 2 \cdot XI2 + 4 \cdot XI1)/3$.

Step 7 OUTPUT (XI);
STOP.

Figura: Pseudo-código para a regra de Simpson Composta.

Exemplo

- **Exemplo.** Use a regra de Simpson composta para aproximar $\int_0^4 e^x dx$ para $n = 4$.
- **Resposta.** Sendo $n = 4$ e $f(x) = e^x$, tem-se $h = \frac{4-0}{4} = 1$ e $x_j = 4 + j$ para $j = 0, 1, 2, 3, 4$. Assim:
$\int_0^4 e^x dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{2} f(x_{2j-1}) + f(x_4)\right] =$
$= \frac{1}{3}[f(x_0) + 2f(x_2) + 4f(x_1) + 4f(x_3) + f(x_4)] =$
$= \frac{1}{3}[f(0) + 2f(2) + 4f(1) + 4f(3) + f(4)] =$
$= \frac{1}{3}[e^0 + 2e^2 + 4e^1 + 4e^3 + e^4] =$
$\frac{1}{3}[1 + 14,778112 + 10,873127 + 80,342148 + 54,598150] =$
$= 53,863846$
- Sabendo que o valor exato é $e^4 - e^0 = 53,59815$. Então, obtém-se o erro absoluto:
$|53,598150 - 53,863846| = 0,265696.$

Regra do Trapézio Composta

- **Teorema.** Seja f, f' e f'' contínuas em $[a, b]$, $h = \frac{b-a}{n}$ e $x_j = a + jh$, para $j = 0, 1, \ldots, n$. Existe $\mu \in (a, b)$ que permite escrever a *regra do Trapézio Composta* para n subintervalos como:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\right] - \frac{b-a}{12}h^2 f''(\mu). \quad (14)$$

em que o erro é da ordem $O(h^2)$.

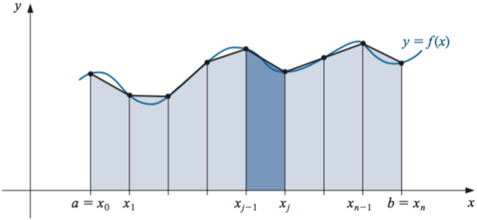

Figura: Regra do Trapézio Composta para n subintervalos.

Exemplo

- **Exemplo.** Determine h que vai assegurar uma aproximação com erro inferior a 0,00002 quando aproximando $\int_0^\pi \sin(x)dx$ pela regra do Trapézio Composta.
- **Resposta.** O erro é obtido do termo, sabendo que $a = 0$ e $b = \pi$: $|\frac{b-a}{12}h^2 f''(\mu)| = |\frac{\pi h^2}{12}(-\sin(\mu))| = \frac{\pi h^2}{12}|\sin(\mu)|$.
- Para assegurar a precisão requerida, considera-se, sabendo que $0 \leq \sin(\mu) \leq 1$ para $\mu \in (0, \pi)$:
  $\frac{\pi h^2}{12}|\sin(\mu)| \leq \frac{\pi h^2}{12} < 0,00002.$
- Como $h = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi}{n}$ e, então, $n = \frac{\pi}{h}$, tem-se:
  $\frac{\pi^3}{12n^2} < 0,00002$ que implica em $n > \sqrt{\frac{\pi^3}{0{,}00024}} \approx 359,44.$
- Logo, é preciso ter $n \geq 360$.
- Para $n = 360$, tem-se $h = \frac{\pi}{360} \approx 0,008727$.

Integrais Múltiplas

- As técnicas discutidas anteriormente podem ser empregadas para aproximar integrais múltiplas.
- O desenvolvimento segue para integrais duplas da forma:

$$\int\int_R f(x,y)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx, \tag{15}$$

em que $R = \{(x,y) | a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$ é uma região retangular no plano, para constantes a, b, c e d.

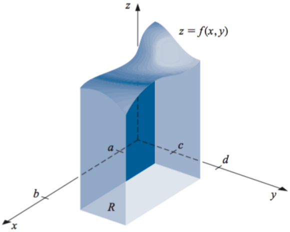

Figura: Região R retangular para uma integral dupla.

Integrais Múltiplas

- Para aplicar a regra de Simpson Composta, divide-se a região R particionando $[a, b]$ e $[c, d]$ em um número par de subintervalos.
- Escolhem-se inteiros n e m para particionar $[a, b]$ e $[c, d]$ em uma malha igualmente espaçada $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e $y_0, y_1, \ldots, y_m$, respectivamente.
- As subdivisões determinam os passos $h = \frac{b-a}{n}$ e $k = \frac{d-c}{m}$.

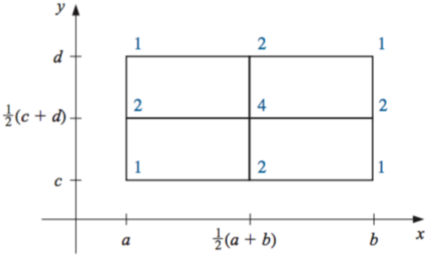

Figura: Região R retangular dividida em uma malha.

Integrais Múltiplas

- A aproximação pela regra de Simpson Composta é da forma:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx \approx \frac{hk}{9}\Bigg\{ \Bigg[& f(x_0,y_0) + 2\sum_{i=1}^{(n/2)-1} f(x_{2i},y_0) \\
& + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1},y_0) + f(x_n,y_0) \Bigg] \\
& + 2\Bigg[\sum_{j=1}^{(m/2)-1} f(x_0,y_{2j}) + 2\sum_{j=1}^{(m/2)-1} \sum_{i=1}^{(n/2)-1} f(x_{2i},y_{2j}) \\
& + 4\sum_{j=1}^{(m/2)-1} \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1},y_{2j}) + \sum_{j=1}^{(m/2)-1} f(x_n,y_{2j}) \Bigg] \\
& + 4\Bigg[\sum_{j=1}^{m/2} f(x_0,y_{2j-1}) + 2\sum_{j=1}^{m/2} \sum_{i=1}^{(n/2)-1} f(x_{2i},y_{2j-1}) \\
& + 4\sum_{j=1}^{m/2} \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1},y_{2j-1}) + \sum_{j=1}^{m/2} f(x_n,y_{2j-1}) \Bigg] \\
& + \Bigg[f(x_0,y_m) + 2\sum_{i=1}^{(n/2)-1} f(x_{2i},y_m) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1},y_m) + f(x_n,y_m) \Bigg] \Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Exemplo

- **Exemplo.** Use a regra de Simpson Composta com $n = 4$ e $m = 2$ para aproximar $\int_{1,4}^{2} \int_{1}^{1,5} \ln(x + 2y)dydx$
- **Resposta.** O tamanho do passo é $h = \frac{2-1,4}{4} = 0,15$ e $k = \frac{1,5-1}{2} = 0,25$.
- A região na figura abaixo tem $i = 0, 1, 2, 3, 4$ e $j = 0, 1, 2$ com os respectivos coeficientes $w_{i,j}$ da soma.

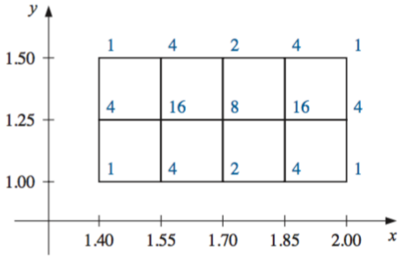

Figura: Região R para o exemplo em questão.

Exemplo

- A aproximação é:
$\int_{1,4}^{2}\int_{1}^{1,5}\ln(x+2y)dydx \approx \frac{hk}{9}\left[\sum_{i=0}^{4}\sum_{j=0}^{2} w_{i,j}\ln(x_i+2y_j)\right] =$
$= \frac{(0,15)(0,25)}{9}[w_{0,0}\ln(x_0+2y_0)+w_{0,1}\ln(x_0+2y_1)+w_{0,2}\ln(x_0+2y_1)+$
$+\cdots+w_{4,0}\ln(x_4+2y_0)+w_{4,1}\ln(x_4+2y_1)+w_{4,2}\ln(x_4+2y_1)] =$
$= 0,2083333333[1\ln(3,4)+4\ln(3,9)+1\ln(4,4)+\cdots+$
$+1\ln(4)+4\ln(4,5)+1\ln(5)] = 0,4295524387.$
- Sabendo que o valor exato da integral dupla é 0,4295545265, tem-se o erro absoluto igual a:
$|0,4295545265-0,4295524387| = 0,0000020878.$
- É importante mencionar que a mesma técnica pode ser aplicada para integrais triplas ou de ordens superiores para funções com três ou mais variáveis.

Regiões Não Retangulares

- A regra de Simpson Composta (ou outras) para integrais duplas pode ser aplicada quando a região não é retangular, ou seja:

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dydx, \tag{16}$$

em que o passo para a variável x é $h = \frac{b-a}{2}$, enquanto o passo para y varia com x: $k(x) = \frac{d(x)-c(x)}{2}$.

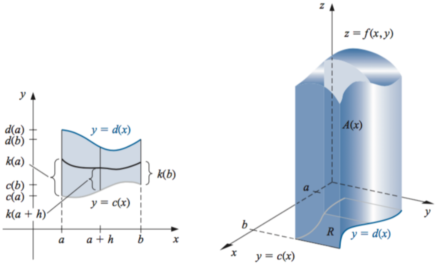

Figura: Integral dupla sobre uma região R não retangular.

Regiões Não Retangulares

- A aproximação pela regra de Simpson Composta no caso de uma região não retangular é da forma:

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy\,dx \approx \int_a^b \frac{k(x)}{3}[f(x,c(x)) + 4f(x,c(x)+k(x)) + f(x,d(x))]\,dx$$

$$\approx \frac{h}{3}\left\{ \frac{k(a)}{3}[f(a,c(a)) + 4f(a,c(a)+k(a)) + f(a,d(a))] \right.$$

$$+ \frac{4k(a+h)}{3}[f(a+h,c(a+h)) + 4f(a+h,c(a+h)$$

$$+ k(a+h)) + f(a+h,d(a+h))]$$

$$\left. + \frac{k(b)}{3}[f(b,c(b)) + 4f(b,c(b)+k(b)) + f(b,d(b))] \right\}.$$

Regra de Simpson Composta para Integrais Duplas

OUTPUT approximation J to I.

Step 1 Set $h = (b-a)/n$;
$J_1 = 0$; *(End terms.)*
$J_2 = 0$; *(Even terms.)*
$J_3 = 0$. *(Odd terms.)*

Step 2 For $i = 0, 1, \ldots, n$ do Steps 3–8.

Step 3 Set $x = a + ih$; *(Composite Simpson's method for x.)*
$HX = (d(x) - c(x))/m$;
$K_1 = f(x, c(x)) + f(x, d(x))$; *(End terms.)*
$K_2 = 0$; *(Even terms.)*
$K_3 = 0$. *(Odd terms.)*

Step 4 For $j = 1, 2, \ldots, m-1$ do Step 5 and 6.

Step 5 Set $y = c(x) + jHX$;
$Q = f(x, y)$.

Step 6 If j is even then set $K_2 = K_2 + Q$
else set $K_3 = K_3 + Q$.

Regra de Simpson Composta para Integrais Duplas

Step 7 Set $L = (K_1 + 2K_2 + 4K_3)HX/3$.

$$\left(L \approx \int_{c(x_i)}^{d(x_i)} f(x_i, y)\, dy \quad \textit{by the Composite Simpson's method.} \right)$$

Step 8 If $i = 0$ or $i = n$ then set $J_1 = J_1 + L$
else if i is even then set $J_2 = J_2 + L$
else set $J_3 = J_3 + L$.

Step 9 Set $J = h(J_1 + 2J_2 + 4J_3)/3$.

Step 10 OUTPUT (J);
STOP.

Figura: Pseudo-código para a regra de Simpson Composta para integrais duplas sobre regiões não retangulares.

Exemplo

- **Exemplo.** Aproxime o volume do sólido definido na integral abaixo com $n = m = 10$ considerando a regra de Simpson Composta para integrais duplas.
$\int_{0,1}^{0,5} \int_{x^3}^{x^2} e^{\frac{y}{x}} dydx$.
- **Resposta.** Após a implementação da referida regra no Octave, tem-se o volume $0,0333054$.