Mestrado em Modelagem e Otimização - RC/UFG

Modelagem Computacional

Aula 2[2]

Prof. Thiago Alves de Queiroz

[2][Cap. 2 e 3] BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. Numerical Analysis (9th ed). Cengage Learning, 2010.

Equação com 1 Variável

- Existem equações que não podem ser resolvidas explicitamente para se obter uma solução. Por exemplo, $1564000 = 1000000e^{\lambda} + \frac{435000}{\lambda}(e^{\lambda} - 1)$.
- Veremos como obter a solução de equações com 1 variável, mas especificadamente, encontrar a raiz (ou solução) da equação $f(x) = 0$.
- A primeira técnica, que é baseada no Teorema do Valor Intermediário, é o *método da Bisseção*.
- Seja f contínua no intervalo $[a, b]$ com $f(a)$ e $f(b)$ tendo sinais opostos.
- Pelo Teorema do Valor Intermediário, então existe um $p \in (a, b)$, tal que $f(p) = 0$.

Método da Bisseção

- O método atua, em cada passo, na metade de subintervalos de $[a, b]$ pegando o ponto médio p.
- No início $a_1 = a$ e $b_1 = b$, tal que p_1 é o ponto médio do intervalo, isto é:

$$p_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}. \tag{1}$$

- Se $f(p_1) = 0$, então $p = p_1$ e o método finaliza.

Se $f(p_1) \neq 0$:

- Se $f(p_1)$ tem o mesmo sinal de $f(a_1)$, então $p \in (p_1, b_1)$. Faça: $a_2 = p_1$ e $b_2 = b_1$.
- Se $f(p_1)$ tem o mesmo sinal de $f(b_1)$, então $p \in (a_1, p_1)$. Faça: $a_2 = a_1$ e $b_2 = p_1$.

- Esses passos são repetidos sobre o intervalo $[a_2, b_2]$ e assim por diante.

Método da Bisseção

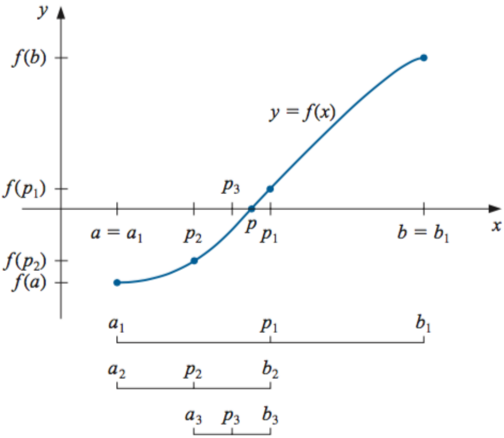

Figura: Exemplo pelo método da Bisseção.

Método da Bisseção

INPUT endpoints a, b; tolerance TOL; maximum number of iterations N_0.

OUTPUT approximate solution p or message of failure.

Step 1 Set $i = 1$;
$FA = f(a)$.

Step 2 While $i \leq N_0$ do Steps 3–6.

Step 3 Set $p = a + (b - a)/2$; (*Compute p_i.*)
$FP = f(p)$.

Step 4 If $FP = 0$ or $(b - a)/2 < TOL$ then
OUTPUT (p); (*Procedure completed successfully.*)
STOP.

Step 5 Set $i = i + 1$.

Step 6 If $FA \cdot FP > 0$ then set $a = p$; (*Compute a_i, b_i.*)
$FA = FP$
else set $b = p$. (*FA is unchanged.*)

Step 7 OUTPUT ('Method failed after N_0 iterations, $N_0 =$', N_0);
(*The procedure was unsuccessful.*)
STOP.

Figura: Pseudo-código do método da Bisseção.

Método da Bisseção

- Outros critérios de parada podem ser considerados no método. Por exemplo, para uma tolerância $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned} |p_N - p_{N-1}| &< \epsilon, \\ \frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|} &< \epsilon, \ p_N \neq 0, \\ |f(p_N)| &< \epsilon. \end{aligned} \tag{2}$$

- O melhor critério de parada é o segundo apresentado na eq. (3).
- Defina o intervalo inicial $[a, b]$ tão pequeno quanto possível.
- **Exemplo.** Encontre p no intervalo $[1, 2]$ que é solução de $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$. Use uma tolerância $\epsilon = 10^{-1}$.

Exemplo

- 1^a iteração: $p_1 = \frac{1+2}{2} = 1,5$, assim $f(1,5) = 2,375 > 0$ e o intervalo fica $[1,\ 1,5]$. O erro é $|2-1| = 1 > 10^{-1}$.
- 2^a iteração: $p_2 = \frac{1+1,5}{2} = 1,25$, assim $f(1,25) = -1,796875 < 0$ e o intervalo fica $[1,25\ 1,5]$. O erro é $|1,5-1| = 0,5 > 10^{-1}$.
- 3^a iteração: $p_3 = \frac{1,25+1,5}{2} = 1,375$, assim $f(1,375) = 0,16211 > 0$ e o intervalo fica $[1,25\ 1,375]$. O erro é $|1,5-1,25| = 0,25 > 10^{-1}$.
- 4^a iteração: $p_4 = \frac{1,25+1,375}{2} = 1,3125$, assim $f(1,3125) = -0,84839 < 0$ e o intervalo fica $[1,3125\ 1,375]$. O erro é $|1,375-1,25| = 0,125 > 10^{-1}$.
- 5^a iteração: $p_4 = \frac{1,3125+1,375}{2} = 1,3437$, assim $f(1,3437) = -0,3518 < 0$ e o intervalo fica $[1,3125\ 1,3437]$. O erro é $|1,375-1,3125| = 0,0625 > 10^{-1}$.
- Como o erro $0,0625 < 0,1$, então o método finaliza com resposta $p_5 = 1,3437$.
- Repita o exemplo para $\epsilon = 10^{-5}$. Quantas iterações foram necessárias?

Método da Bisseção

- **Teorema.** Seja f contínua em $[a, b]$ e $f(a)f(b) < 0$. O método da Bisseção gera uma sequência $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ que se aproxima a zero por p com convergência:

$$|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n}, \text{ para } n \geq 1. \tag{3}$$

- Ou seja, a sequência $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge para p com taxa $O(\frac{1}{2^n})$.
- **Exemplo.** Determine o número de iterações para resolver $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ no intervalo $[1, 2]$ com precisão $\epsilon = 10^{-3}$.
- **Resposta.** Sabendo a taxa de convergência do método:
  $|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n} < \epsilon$,
  $\frac{b-a}{2^n} = 2^{-n}(b-a)$,
  $2^{-n}(2-1) = 2^{-n} < 10^{-3}$.

Exemplo

- Usando logaritmo na base 10 (pois a tolerância é na base 10 também), tem-se:
  $\log(2^{-n}) < \log(10^{-3})$,
  $-n\log(2) < -3$.
- Com isso, basta isolar n para obter:
  $n > \frac{3}{\log(2)} \approx 9,96$.
- Então, o método precisará de $n = 10$ iterações para ter uma aproximação de $\epsilon = 10^{-3}$.
- A título de informação: $p_9 = 1,365234375$ que está dentro da precisão de 10^{-3}.

Método de Newton

- Também conhecido como método de Newton-Raphson, ele é um dos mais eficientes nessa categoria de problemas.
- Seja f, f' e f'' contínuas no intervalo $[a, b]$. Seja p_0 a aproximação para p tal que $f'(p_0) \neq 0$ e $|p - p_0|$ é um valor pequeno.
- O método de Newton é derivado a partir do polinômio de Taylor de ordem 1 em torno de p_0 e avaliado em $x = p$, isto é:

$$f(p) = 0 = f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) + \frac{(p - p_0)^2}{2} f''(\xi(p)). \tag{4}$$

- Assim, o método inicia com uma aproximação inicial p_0 e gera a sequência $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, \text{ para } n \geq 1. \tag{5}$$

Método de Newton

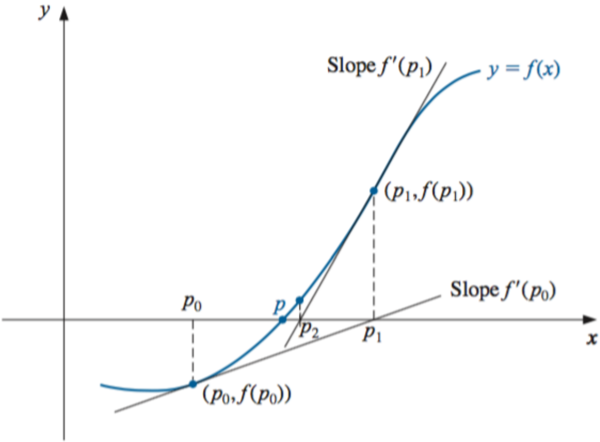

Figura: Exemplo pelo método da Newton.

Método de Newton

INPUT initial approximation p_0; tolerance TOL; maximum number of iterations N_0.

OUTPUT approximate solution p or message of failure.

Step 1 Set $i = 1$.

Step 2 While $i \leq N_0$ do Steps 3–6.

  Step 3 Set $p = p_0 - f(p_0)/f'(p_0)$. (*Compute* p_i.)

  Step 4 If $|p - p_0| < TOL$ then
    OUTPUT (p); (*The procedure was successful.*)
    STOP.

  Step 5 Set $i = i + 1$.

  Step 6 Set $p_0 = p$. (*Update* p_0.)

Step 7 OUTPUT ('The method failed after N_0 iterations, $N_0 =$', N_0);
(*The procedure was unsuccessful.*)
STOP.

Figura: Pseudo-código do método de Newton.

Múltiplos Zeros

- **Definição.** A solução p de $f(x) = 0$ é um zero de multiplicidade m, se para $x \neq p$, tem-se: $f(x) = (x - p)^m q(x)$, sendo $\lim_{x \to p} q(x) \neq 0$.
- **Teorema.** A função f com f' contínua em $[a, b]$ tem um único zero em $p \in (a, b)$ se e somente se $f(p) = 0$, mas $f'(p) \neq 0$.
- **Teorema.** A função f com f^m contínua em $[a, b]$ tem um zero de multiplicidade m em $p \in (a, b)$ se e somente se:

$$0 = f(p) = f'(p) = f''(p) = \cdots = f^{m-1}(p), \text{ mas } f^m(p) \neq 0. \tag{6}$$

- **Exemplo.** Verifique que $f(x) = e^x - x - 1$ tem um zero de multiplicidade 2 em $x = 0$.
- **Resposta.** Note que $f'(x) = e^x - 1$ e $f''(x) = e^x$. Além disso: $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$ e $f'(0) = e^0 - 1 = 0$ e $f''(0) = e^0 = 1$.

Exemplo

- Logo, pelo Teorema anterior, tem-se que f possui um zero de multiplicidade 2 em $x = 0$.

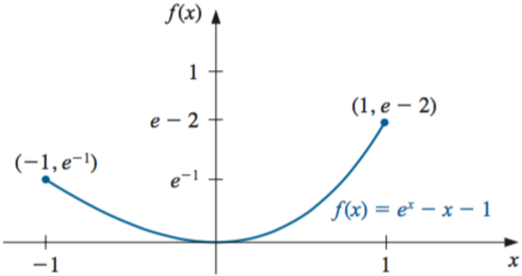

Figura: Gráfico de $f(x) = e^x - x - 1$.

Interpolação e Aproximação Polinomial

- Uma das mais práticas classes de funções que mapeiam reais para reais é a de polinômios algébricos da forma:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{7}$$

sendo $a_0, \ldots, a_n$ constantes reais e n um inteiro não negativo.
- Dada uma função contínua em um intervalo fechado e limitado, então é possível obter um polinômio "bem" próximo dessa função.

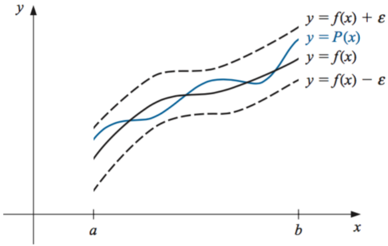

Figura: Aproximação de uma função.

Interpolação e Aproximação Polinomial

- **Teorema.** Seja f definida e contínua em $[a, b]$. Para cada $\epsilon > 0$ existe um polinômio $P(x)$ que satisfaz:

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon, \text{ para todo } x \in [a, b]. \tag{8}$$

- Uma boa razão para usar polinômios é que as suas derivadas e integrais são fáceis de serem obtidas.
- Polinômios de Taylor aproximam bem uma função apenas nas proximidades de um dado ponto.

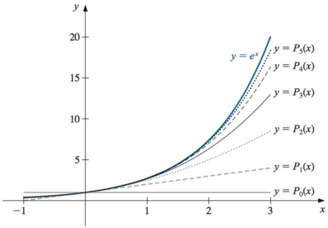

Figura: Aproximação por polinômio de Taylor.

Polinômio Interpolador de Lagrange

- Na interpolação polinomial, busca-se determinar um polinômio que passa por pontos distintos (x_0, y_0) e (x_1, y_1).
- Considere as funções:

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \text{ e } L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}. \tag{9}$$

- O *Polinômio Interpolador de Lagrange* linear que passa em (x_0, y_0) e (x_1, y_1) é:

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}f(x_1). \tag{10}$$

- **Exemplo.** Determine o Polinômio Interpolador de Lagrange linear que passa pelos pontos $(2, 4)$ e $(5, 1)$

Exemplo

- **Reposta.** Calculando L_0 e L_1, sabendo que $x_0 = 2, x_1 = 5$, $f(x_0) = 4$ e $f(x_1) = 1$:
  $L_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} = \frac{x-5}{2-5} = -\frac{1}{3}(x-5)$,
  $L_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{x-2}{5-2} = \frac{1}{3}(x-2)$.
- O polinômio é:
  $P(x) = -\frac{1}{3}(x-5)4 + \frac{1}{3}(x-2)1 = -x+6$.

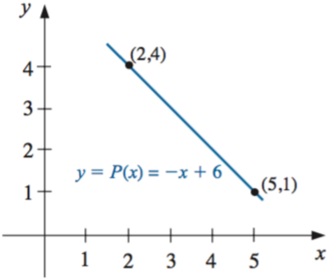

Figura: Polinômio Interpolador de Lagrange Linear para o exemplo.

Polinômio Interpolador de Lagrange

- A generalização do conceito considera um polinômio de grau no máximo n que passa por $n+1$ pontos.
- **Teorema.** Se $x_0, x_1, \dots, x_n$ são $n+1$ números distintos e f é uma função cujos valores são conhecidos nesses números, então existe um polinômio $P(x)$ de grau no máximo n com $f(x_k) = P(x_k)$, para cada $k = 0, 1, \dots, n$.
- O polinômio $P(x)$ é dado por:

$$P(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \cdots + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x), \quad (11)$$

sendo, para cada $k = 0, 1, \dots, n$:

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)}. \quad (12)$$

Polinômio Interpolador de Lagrange

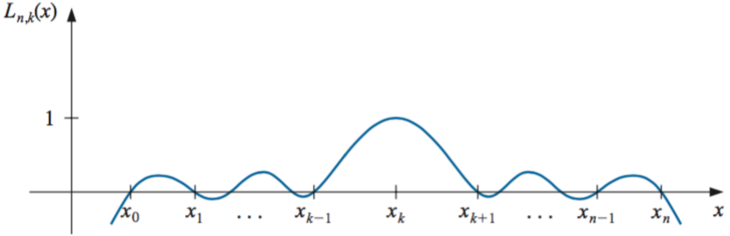

Figura: Representação típica de $L_{n,k}$ quando n é par.

- **Exemplo.** Seja $x_0 = 2$, $x_1 = 2,75$ e $x_2 = 4$. Encontre o segundo Polinômio Interpolador de Lagrange para $f(x) = \frac{1}{x}$. Aproxime $f(3)$ por tal polinômio.

Exemplo

- **Resposta.** Calcula-se inicialmente os coeficientes de $L_0(x)$, $L_1(x)$ e $L_2(x)$:

$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-2{,}75)(x-4)}{(2-2{,}5)(2-4)} = \frac{2}{3}(x-2,75)(x-4).$

$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-2)(x-4)}{(2{,}75-2)(2{,}75-4)} = -\frac{16}{15}(x-2)(x-4).$

$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-2)(x-2{,}75)}{(4-2)(4-2{,}5)} = \frac{2}{5}(x-2)(x-2,75).$

- Sabendo que $f(x_0) = \frac{1}{2}$, $f(x_1) = \frac{4}{11}$ e $f(x_2) = \frac{1}{4}$. Então:

$P(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) =$

$= \frac{1}{3}(x-2,75)(x-4) - \frac{64}{165}(x-2)(x-4) + \frac{1}{10}(x-2)(x-2,75) =$

$= \frac{1}{22}x^2 - \frac{35}{88}x + \frac{49}{44}.$

- Como $f(3) = \frac{1}{3}$, sua aproximação por $P(x)$ é:

$f(3) \approx P(3) = \frac{9}{22} - \frac{105}{88} + \frac{49}{44} = \frac{29}{88} \approx 0,32955.$

Exemplo

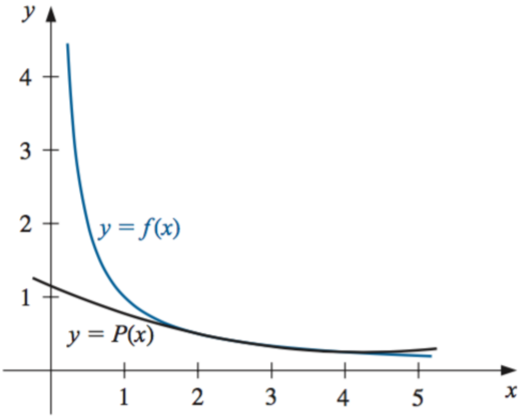

Figura: Gráfico do polinômio $P(x)$ em comparação com $f(x)$.

Aproximação de Dados

- É comum fazer a interpolação de dados tabelados, em que a função que gerou os dados não é, em geral, conhecida.
- **Definição.** Seja f definida em $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ e suponha que $m_1, m_2, \dots, m_k$ são k inteiros distintos, com $0 \leq m_i \leq n$ para cada i. O polinômio de Lagrange que coincide com $f(x)$ nos k pontos $x_{m_1}, x_{m_2}, \dots, x_{m_k}$ é denotado por $P_{m_1,m_2,\dots,m_k}(x)$.
- **Exemplo.** Seja $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 6$ e $f(x) = e^x$. Determine o polinômio $P_{1,2,4}(x)$ e aproxime $f(5)$ por este polinômio.
- **Resposta.** $P_{1,2,4}(x)$ é o polinômio de Lagrange que coincide com $f(x)$ em $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ e $x_4 = 6$. Assim:
  $P_{1,2,4}(x) = f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_4)L_4(x) =$
  $= \frac{(x-3(x-6)}{(2-3)(2-6)}e^2 + \frac{(x-2)(x-6)}{(3-2)(3-6)}e^3 + \frac{(x-2)(x-3)}{(6-2)(6-3)}e^6.$
- Para $f(5)$ aproximado pelo polinômio $P_{1,2,4}(x)$:
  $P(5) = -\frac{1}{2}e^2 + e^3 + \frac{1}{2}e^6 \approx 218,105.$

Aproximação de Dados

- **Teorema.** Seja f definida em $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k$ e seja x_j e x_i dois valores distintos neste conjunto. Então:

$$P(x) = \frac{(x - x_j)P_{0,1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}(x) - (x - x_i)P_{0,1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}(x)}{x_i - x_j} \quad (13)$$

  é o k-ésimo polinômio de Lagrange que interpola f nos $k + 1$ pontos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k$.

- Pelo teorema, tem-se que os polinômios podem ser gerados de forma recursiva. Por exemplo:
  $P_{0,1} = \frac{1}{x_1 - x_0}[(x - x_0)P_1 - (x - x_1)P_0]$,
  $P_{1,2} = \frac{1}{x_2 - x_1}[(x - x_1)P_2 - (x - x_2)P_1]$,
  $P_{0,1,2} = \frac{1}{x_2 - x_0}[(x - x_0)P_{1,2} - (x - x_2)P_{0,1}]$.

Método de Neville

- O procedimento baseado no teorema anterior para gerar aproximações por polinômios interpoladores é o método de Neville.
- Considere $Q_{i,j}(x)$, para $0 \leq j \leq i$, denotando o polinômio interpolador de grau j nos $j+1$ números $x_{i-j}, x_{i-j+1}, \ldots, x_{i-1}, x_i$, isto é:

$$Q_{i,j}(x) = P_{i-j,i-j+1,\ldots,i-1,i}(x). \tag{14}$$

x_0	$P_0 = Q_{0,0}$				
x_1	$P_1 = Q_{1,0}$	$P_{0,1} = Q_{1,1}$			
x_2	$P_2 = Q_{2,0}$	$P_{1,2} = Q_{2,1}$	$P_{0,1,2} = Q_{2,2}$		
x_3	$P_3 = Q_{3,0}$	$P_{2,3} = Q_{3,1}$	$P_{1,2,3} = Q_{3,2}$	$P_{0,1,2,3} = Q_{3,3}$	
x_4	$P_4 = Q_{4,0}$	$P_{3,4} = Q_{4,1}$	$P_{2,3,4} = Q_{4,2}$	$P_{1,2,3,4} = Q_{4,3}$	$P_{0,1,2,3,4} = Q_{4,4}$

Figura: Tabela para o método de Naville.

Método de Neville

INPUT numbers $x, x_0, x_1, \ldots, x_n$; values $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ as the first column $Q_{0,0}, Q_{1,0}, \ldots, Q_{n,0}$ of Q.

OUTPUT the table Q with $P(x) = Q_{n,n}$.

Step 1 For $i = 1, 2, \ldots, n$

for $j = 1, 2, \ldots, i$

$$\text{set } Q_{i,j} = \frac{(x - x_{i-j})Q_{i,j-1} - (x - x_i)Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}.$$

Step 2 OUTPUT (Q);

STOP.

Figura: Pseudo-código para o método de Naville.

- Um critério de parada: $|Q_{i,i} - Q_{i-1,i-1}| < \epsilon$, em que ϵ é a tolerância requerida.

Método de Neville

- **Exemplo.** Seja $x_0 = 1$, $x_1 = 1,3$, $x_2 = 1,6$, $x_3 = 1,9$ e $x_4 = 2,2$, com $Q_{0,0} = f(x_0) = 0,7651977$, $Q_{1,0} = f(x_1) = 0,6200860$, $Q_{2,0} = f(x_2) = 0,4554022$, $Q_{3,0} = f(x_3) = 0,2818186$ e $Q_{4,0} = f(x_4) = 0,1103623$, construa a tabela até $Q_{4,4}$.

1.0	0.7651977				
1.3	0.6200860	0.5233449			
1.6	0.4554022	0.5102968	0.5124715		
1.9	0.2818186	0.5132634	0.5112857	0.5118127	
2.2	0.1103623	0.5104270	0.5137361	0.5118302	0.5118200

Figura: Tabela final.

Diferenças Divididas

- As diferenças divididas de f com respeito a $x_0, x_1, \ldots, x_n$ são usadas para expressar $P_n(x)$ na forma:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}), \quad (15)$$

  para constantes apropriadas $a_0, a_1, \ldots, a_n$.
- Na notação de diferença-dividida, tem-se que $f[x_i] = f(x_i)$. Além disso:
  $f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$,
  $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$,
  $f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$.
- O processo finaliza ao calcular a n-ésima diferença divida:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}. \quad (16)$$

Diferenças Divididas

- O polinômio $P_n(x)$ pode ser escrito na forma de Diferenças Divididas de Newton:

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}). \quad (17)$$

x	$f(x)$	First divided differences	Second divided differences	Third divided differences
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2] = \dfrac{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]}{x_2 - x_0}$	
		$f[x_1,x_2] = \dfrac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \dfrac{f[x_1,x_2,x_3] - f[x_0,x_1,x_2]}{x_3 - x_0}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3] = \dfrac{f[x_2,x_3] - f[x_1,x_2]}{x_3 - x_1}$	
		$f[x_2,x_3] = \dfrac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4] = \dfrac{f[x_2,x_3,x_4] - f[x_1,x_2,x_3]}{x_4 - x_1}$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4] = \dfrac{f[x_3,x_4] - f[x_2,x_3]}{x_4 - x_2}$	
		$f[x_3,x_4] = \dfrac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3}$		$f[x_2,x_3,x_4,x_5] = \dfrac{f[x_3,x_4,x_5] - f[x_2,x_3,x_4]}{x_5 - x_2}$
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3,x_4,x_5] = \dfrac{f[x_4,x_5] - f[x_3,x_4]}{x_5 - x_3}$	
		$f[x_4,x_5] = \dfrac{f[x_5] - f[x_4]}{x_5 - x_4}$		
x_5	$f[x_5]$			

Figura: Tabela de diferenças divididas para $x_0, x_1, \ldots, x_5$.

INPUT numbers $x_0, x_1, \ldots, x_n$; values $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ as $F_{0,0}, F_{1,0}, \ldots, F_{n,0}$.

OUTPUT the numbers $F_{0,0}, F_{1,1}, \ldots, F_{n,n}$ where

$$P_n(x) = F_{0,0} + \sum_{i=1}^{n} F_{i,i} \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j). \quad (F_{i,i} \text{ is } f[x_0, x_1, \ldots, x_i].)$$

Step 1 For $i = 1, 2, \ldots, n$

For $j = 1, 2, \ldots, i$

set $F_{i,j} = \dfrac{F_{i,j-1} - F_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}$. $\quad (F_{i,j} = f[x_{i-j}, \ldots, x_i].)$

Step 2 OUTPUT $(F_{0,0}, F_{1,1}, \ldots, F_{n,n})$;

STOP.

Figura: Pseudo-código para obter os coeficientes de $P_n(x)$.

Exemplo

- **Exemplo.** Seja $x_0 = 1$, $x_1 = 1,3$, $x_2 = 1,6$, $x_3 = 1,9$ e $x_4 = 2,2$, com $f[x_0] = 0,7651977$, $f[x_1] = 0,6200860$, $f[x_2] = 0,4554022$, $f[x_3] = 0,2818186$ e $f[x_4] = 0,1103623$, construa a tabela para $x_0, \ldots, x_4$ e determine o polinômio $P_4(x)$.
- **Resposta.** $P_4(x) = 0,7651977 - 0,4837057(x-1) - 0,1087339(x-1)(x-1,3) + 0,0658784(x-1)(x-1,3)(x-1,6) + 0,0018251(x-1)(x-1,3)(x-1,6)(x-1,9)$.

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, \ldots, x_i]$	$f[x_{i-4}, \ldots, x_i]$
0	1.0	0.7651977				
			−0.4837057			
1	1.3	0.6200860		−0.1087339		
			−0.5489460		0.0658784	
2	1.6	0.4554022		−0.0494433		0.0018251
			−0.5786120		0.0680685	
3	1.9	0.2818186		0.0118183		
			−0.5715210			
4	2.2	0.1103623				

Figura: Tabela de diferenças divididas para $x_0, x_1, \ldots, x_4$.