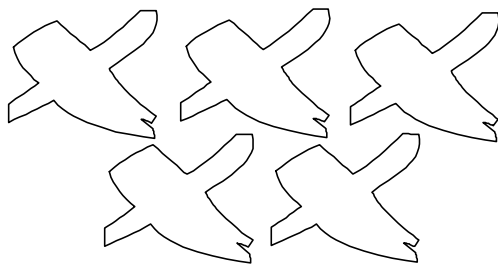


Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás



**Revista da Olimpíada
nº 1, 2000**

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Universidade Federal de Goiás

Milca Severino Pereira

Reitora

Paulo Alcanfor Ximenes

Vice- Reitor

Iara Barreto

Pró- Reitora de Graduação

José Luiz Domingues

Pró- Reitor de Pesquisa e Pós-Graduação

Ilka Maria de Almeida Moreira

Pró- Reitora de Administração e Finanças

Emilson Rocha de Oliveira

Pró- Reitor de Desenvolvimento Institucional e Recursos Humanos

Ana Luiza Lima Sousa

Pró- Reitora de Extensão e Cultura

Fátima dos Reis

Pró- Reitora de Assuntos da Comunidade Universitária

Ronaldo Alves Garcia

Diretor do Instituto de Matemática e Estatística

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Comissão Organizadora

Gisele de Araújo Prateado Gusmão (Coordenadora), Fábio Vitoriano e Silva, Jeblin Antônio Abraão, Luciana Maria Ávila, Rogerio Queiroz Chavez, Ronaldo Alves Garcia, Shirlei Serconek, João Leonardo Muniz F. Rabêlo (bolsista).

Comitê Editorial da Revista da Olimpíada

Gisele de Araújo P. Gusmão, Ronaldo Alves Garcia, Shirlei Serconek

Editoração Eletrônica

João Leonardo M. F. Rabêlo

Arte da Capa

Anderson Viana Macêdo (Logomarca)

Joelson Santos de Souza

Tiragem

2000 exemplares

Postagem

1º semestre de 2000

Revista da Olimpíada nº 1, 2000

Universidade Federal de Goiás – Instituto de Matemática e Estatística

Campus Samambaia – CP 131 – CEP 74001-970 – Goiânia –GO

Correio eletrônico: omeg@mat.ufg.br Tel: (62) 821-1208 Fax: (62) 821-1180

Home-page: <http://www.mat.ufg.br/eventos/olimpiadas/>

Os artigos assinados são da responsabilidade dos autores. É permitida a reprodução de artigos desde que seja citada a fonte.

Índice

•	Apresentação -----	05
•	Coletânea 2000	
	Problemas propostos Nível 1 -----	06
	Problemas propostos Nível 2 -----	08
	Problemas propostos Nível 3 -----	11
	Resolução Nível 1 -----	13
	Resolução Nível 2 -----	18
	Resolução Nível 3 -----	21
•	Relação dos Classificados na VIII Olimpíada / 1999	
	Premiados, Menções Honrosas , Menções Especiais-----	30
•	VIII Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás	
	Resolução da prova Nível 1 -----	33
	Resolução da prova Nível 2 -----	40
	Resolução da prova Nível 3 -----	44
•	Notícias -----	49
•	Artigos	
	Olimpíada de Matemática em Goiás	
	Gisele de Araújo P. Gusmão e Ronaldo Alves Garcia-----	51
	Seqüências	
	Gisele de Araújo P. Gusmão -----	65
	Números Reais	
	Maurício Donizetti Pieterzack -----	75
	Geometria, o V axioma de Euclides	
	Romildo da Silva Pina -----	101

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Apresentação

Há alguns anos o Instituto de Matemática e Estatística – IME envia, a todas escolas cadastradas, uma coletânea de problemas e a resolução comentada das provas da mais recente Olimpíada realizada. Estes materiais têm por objetivo ajudar o professor na preparação de seus alunos para as Olimpíadas além de serem úteis em sala de aula como alternativa aos problemas propostos nos livros textos.

Esta revista surgiu destes materiais. Além de ter uma coletânea de problema e a resolução comentada das provas da VIII Olimpíada, ela traz um pouco da história da nossa Olimpíada, três artigos de matemática, a relação dos classificados na VIII Olimpíada e notícias das olimpíadas e do IME.

Esperamos contar com o apoio do leitor no sentido de nos enviar sugestões para melhorarmos o número 2 desta revista e, como as resoluções dos problemas propostos são em sua maioria apenas resumo de soluções, esperamos também o envio de resoluções melhores.

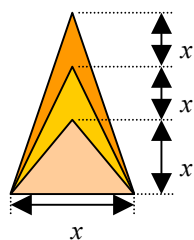
Coordenação de Olimpíadas

Coletânea 2000
Problemas propostos Nível 1

- 1) Uma planta aquática tem a propriedade de dobrar sua superfície a cada dia que passa. Colocando-se uma muda dessa planta num certo lago, em 30 dias ela cobrirá o lago todo. Em quantos dias ela cobrirá metade do lago? E se colocarmos duas mudas no lago, em quantos dias ele estará coberto?
- 2) Um banco oferece a seus clientes a utilização de computadores para retirada de dinheiro. O computador faz pagamento utilizando notas de R\$ 1,00 e R\$ 5,00. De quantas maneiras diferentes o computador poderá pagar a quantia de R\$ 100,00 a um cliente?
- 3) Uma escola tem exatamente 100 armários e 100 estudantes. No primeiro dia de aula os estudantes encontraram-se fora do prédio e concordaram no seguinte plano: o primeiro estudante entrará na escola e abrirá todos os armários. O segundo aluno entrará e fechará os armários com números pares (2,4,6,8,...). O terceiro aluno, então, inverterá o que tiver sido feito a cada 3 armários (no 3º,6º,9º,12º,...); o que significa: ele abrirá se o armário estiver fechado, ou fechará se estiver aberto. O quarto aluno inverterá o que tiver sido feito a cada 4 armários (no 4º,8º,12º,16º,...) e assim por diante. Após todos os alunos terem entrado e realizados suas tarefas, como estará o armário de número 100: aberto ou fechado?
- 4) Em uma escola vai ser organizado um campeonato de vôlei com a participação de 32 equipes. As equipes vão ser distribuídas em 8 grupos. Em cada grupo, cada equipe joga com todas as outras e a melhor equipe se classifica para a fase seguinte. As equipes classificadas são distribuídas em 2 grupos nos quais o sistema se repete. Finalmente as primeiras colocadas disputam a final. Ao todo, quantos jogos são disputados?
- 5) Um feirante tinha uma cesta de ovos para vender e atendeu sucessivamente três fregueses. Cada freguês levou a metade dos ovos existentes na cesta e mais meio ovo. Se o feirante não precisou quebrar nenhum ovo e sobraram 10 ovos na cesta, quantos ovos havia inicialmente?

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

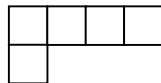
- 6) Como é possível retirar de um rio exatamente 6 litros de água se só se dispõe, para medir a água, de dois baldes com 4 litros e 9 litros de capacidade?
- 7) Um elevador pode levar 20 adultos ou 24 crianças. Se 15 adultos já estão no elevador, quantas crianças podem ainda entrar?
- 8) Olhem só como ficou a chama no instante em que um fotógrafo fotografou a vela! O diâmetro da vela mede x cm. Na figura qual dos estágios da chama tem maior área? Para uma montagem fotográfica, precisa-se que a chama tenha exatamente 6 cm^2 . Qual deve ser o valor de x ?



- 9) Um navio pirata de 9 m de largura máxima tem um canhão que para cada 200g de pólvora recua 1 m quando atira. Sem saber disso, um marujo colocou 1,5 kg de pólvora e atirou. Se o canhão bater na amurada, ele volta, na mesma direção, tanto quanto recua caso a largura permita continuar. Desprezando as dimensões:
- A que distância da posição de tiro ele ficou?
 - Esse marujo sempre deixa próximo do canhão, que está na sua posição, uma lata de 4 litros cheia de pólvora. Cada litro dessa pólvora equivale a 0,9 kg. A que distância da posição de tiro ficaria o canhão depois do tiro, caso o marujo distraído colocasse nele toda a pólvora da lata para um único tiro?
 - Se ele dividisse a pólvora em três partes iguais, uma para cada tiro, sendo que o canhão não é recolocado em seu lugar após o tiro, a que distância ficaria o canhão após o último tiro?
- 10) Um pescador se perdeu no mar e notou que seu barco estava furado. A cada 15 min. , entravam 180 litros de água. Com o balde, ele começou a despejar a água para fora, mas só conseguiu tirar 9 litros a cada 5 min. A lancha de socorro mais próxima estava a 50 km do local e sua velocidade máxima era de 180 km/h. Determine qual deveria ser a velocidade mínima para que a lancha chegasse a tempo, sabendo que o barco afundaria se entrassem 255 litros de água.

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

- 11) (XXI OBM) Corte 10 algarismos do número 1234512345123451234512345 para que o número restante seja o maior possível.
- 12) (XXI OBM) Pedro distribuiu 127 moedas de 1 real em sete caixas e colocou em cada uma delas uma etiqueta dizendo o número de moedas da caixa. Essa distribuição foi feita de forma que qualquer quantia de R\$ 1,00 a R\$127,00 pudesse ser paga entregando-se apenas caixas fechadas. De que maneira Pedro fez essa distribuição?
- 13) (XXI OBM) Um edifício muito alto possui 1000 andares, excluindo-se o térreo. Do andar térreo partem 5 elevadores:
O elevador A para em todos os andares.
O elevador B para nos andares múltiplos de 5, isto é, 0,5,10,15,...
O elevador C para nos andares múltiplos de 7, isto é, 0,7,14,21,...
O elevador D para nos andares múltiplos de 17, isto é, 0,17,34,51,...
O elevador E para nos andares múltiplos de 23, isto é, 0,23,46,69,...
- a) Mostre que, excetuando-se o andar térreo, não existe nenhum andar onde param os 5 elevadores.
b) Determine todos os andares onde param 4 elevadores.
- 14) (XXI OBM) Encontre o menor tabuleiro quadrado que pode ser ladrilhado usando peças com o seguinte formato:



- 15) Você sabe que existem 9 números de um algarismo, 90 números de dois algarismos, 900 números de três algarismos, etc. Considere agora cada número cujo último algarismo à direita representa o número de algarismos desse número. Por exemplo, o número 9 074 é um deles, pois 4 é o número de seus algarismos. Quantos números desse tipo existem ?

Problemas propostos Nível 2

- 1) Chamam-se palíndromos os números inteiros que não se alteram quando é invertida a ordem de seus algarismos (por exemplo, 383, 4224, 74847). Qual é o número de palíndromos de cinco algarismos?
- 2) Um fazendeiro comprou 1000 bois pagando R\$ 250,00 por cada um. Vendeu 400 com lucro de 25%. A que preço deverá vender cada um dos seiscentos restantes de modo que, no final, seu lucro total seja de 40%?

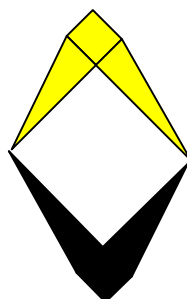
Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

- 3) Um ano solar tem 365 dias mais 5h 48min 46s. Por isso, no calendário encontramos, de 4 em 4 anos, três anos com 365 dias e um ano bissexto, com 366 dias. Entretanto, por não serem exatamente 365 dias e 6h, a intercalação de anos bissextos não é tão simples. Em meados do século XVI, o papa Gregório XIII determinou que nenhum ano que terminasse em 00 fosse bissexto, exceto os divisíveis por 400. Assim, em nosso calendário, os anos bissextos são divisíveis por 4, excluindo os terminados em 00 que não são divisíveis por 400. O ano 2000 é bissexto? O ano 2100, será bissexto? Quantos são os anos bissextos no período de 1601 a 2000?
- 4) Quantos triângulos equiláteros existem na figura abaixo?



- 5) Mostre que não existe triângulo retângulo isósceles com lados inteiros.
- 6) Diz-se que um ponto divide um segmento de reta em média e extrema razão ou em secção áurea, se o mais longo dos segmentos é a média geométrica entre o segmento menor e o segmento todo. A razão entre o segmento menor e o segmento maior chama-se razão áurea. Os pitagóricos mostraram interesse considerável pela secção áurea e pela razão áurea. Mostre que a razão áurea é $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
- 7) Três algarismos distintos, combinados de três formas diferentes, representam três números cuja raiz quadrada é exata. Quais são essas combinações?

- 8) Uma empresa adotou o seguinte logotipo, formado por 4 triângulos retângulos e 3 quadrados:



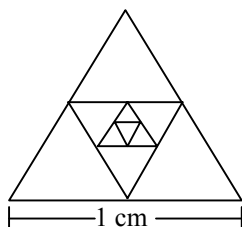
- a) Represente a área da figura dada, como um polinômio na variável x , dado que x

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

simboliza a medida do lado do quadrado menor e que a área desse quadrado dá numericamente a medida do lado do quadrado maior.

b) Calcule o valor da área para $x = 3\text{cm}$.

- 9) Para testar os conhecimentos de um sargento, o capitão ordenou que separasse 10 soldados e os dispusesse em 5 fileiras com 4 homens. Como o sargento conseguiu realizar essa tarefa?
- 10) Nos triângulos equiláteros a seguir, cada triângulo menor toca o ponto médio dos lados dos triângulos maiores. Calcule a área do triângulo menor.



- 11) (XXI OBM) Num quadro-negro são escritos três inteiros. Começa-se, então, uma sequência de movimentos onde, em cada passo, apaga-se um deles e escreve-se em seu lugar a soma dos outros dois diminuída de uma unidade. Após vários movimentos, estão escritos no quadro os números 17, 75 e 91. É possível que no início estejam escritos no quadro:
- a) 2, 2, 2, ?
b) 3, 3, 3, ?
- 12) (XXI OBM) Seja ABCD um quadrado. Escolhemos pontos M, N, P, Q respectivamente sobre AB, BC, CD e DA, de modo que as circunferências circunscritas aos triângulos MBN e PDQ sejam tangentes exteriormente. Mostre que $MN + PQ \geq AC$.
- 13) (XXI OBM) Determine o maior natural n para o qual existe uma reordenação (a, b, c, d) de $(3, 6, 9, 12)$ (isto é, $\{a, b, c, d\} = \{3, 6, 9, 12\}$) tal que o número $\sqrt[n]{3^a 6^b 9^c 12^d}$ seja inteiro. Justifique sua resposta.
- 14) (XXI OBM) Um professor de matemática passou aos alunos a adição $A/B + C/D$ onde A, B, C e D são inteiros positivos, as frações estão

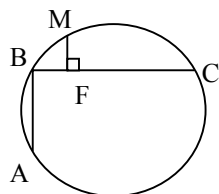
Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

simplificadas ao máximo e os denominadores são números primos entre si. Os alunos adicionaram as frações tirando o mínimo múltiplo comum dos denominadores das parcelas e escrevendo este como denominador do resultado. Mostre que a fração que os alunos encontraram como resultado está simplificada.

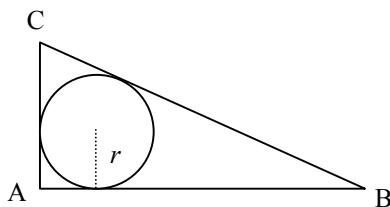
- 15) (XXI OBM) Determine todos os inteiros positivos n para os quais é possível montarmos um retângulo 9×10 usando peças $1 \times n$.

Problemas propostos Nível 3

- 1) Se AB e BC formam uma corda quebrada num círculo (com $AB \neq BC$), M é ponto médio do arco ABC e F o pé da perpendicular de M à corda maior, demonstre que F será o ponto médio da corda quebrada ABC .



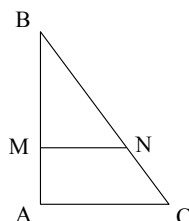
- 2) Dado um triângulo retângulo ABC , prove que o raio r do círculo inscrito no triângulo é igual a metade da soma dos catetos menos a hipotenusa, ou seja, $r = \frac{AB + AC - BC}{2}$.



- 3) Num triângulo qualquer de lados a , b e c demonstre que a área S é igual a $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, onde $p = \frac{a+b+c}{2}$.
- 4) Um triângulo é dito inteiro se seus lados são todos inteiros. Determinar todos os triângulos inteiros cujo perímetro é igual a sua área.

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

- 5) Prove que se $a + b + c = 0$, então $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.
- 6) (XXI OBM) Nos extremos de um diâmetro de um círculo, escreve-se o número 1 (primeiro passo). A seguir, cada semicírculo é dividido ao meio e em cada um dos seus pontos médios escreve-se a soma dos números que estão nos extremos do semicírculo (segundo passo). A seguir, cada quarto de círculo é dividido ao meio e em cada um dos seus pontos médios coloca-se a soma dos números que estão nos extremos de cada arco (terceiro passo). Procede-se, assim, sucessivamente: sempre cada arco é dividido ao meio e em seu ponto médio é escrita a soma dos números que estão em seus extremos. Determinar a soma de todos os números escritos após 1999 passos.
- 7) (XXI OBM) José tem três pares de óculos, um magenta, um amarelo e um ciano. Todo dia de manhã ele escolhe um ao acaso, tendo apenas o cuidado de nunca usar o mesmo que no dia anterior. Se no dia primeiro de agosto ele usou o magenta, qual a probabilidade de que no dia 31 de agosto ele volte a usar o magenta?
- 8) (XXI OBM) Encontre as soluções inteiras de $x^3 - y^3 = 999$.
- 9) O número $N = 11111 \dots 11$ possui 1999 dígitos, todos iguais a 1. Qual é o resto da divisão de N por 7?
- 10) Para quantos valores inteiros de x existe um triângulo acutângulo de lados 12, 10 e x ?
- 11) Dois irmãos herdaram um terreno com a forma de um triângulo ABC retângulo em A, e com o cateto AB de 84 m de comprimento. Eles resolveram dividir o terreno em duas partes de mesma área, por um muro MN paralelo a AC como mostra a figura abaixo. Calcule o comprimento do segmento BM.



Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

- 12) As representações decimais dos números 2^{1999} e 5^{1999} são escritas lado a lado. Qual é o número de algarismos escritos?
- 13) Uma caixa contém 100 bolas de cores distintas. Destas, 30 são vermelhas, 30 são verdes, 30 são azuis e entre as 10 restantes, algumas são brancas e outras são pretas. Qual é o menor número de bolas que devemos tirar da caixa, sem lhes ver a cor, para termos a certeza de haver pelo menos 10 bolas da mesma cor?

Resolução Nível 1

- 1)
- Como a superfície dobra a cada dia, no 30º dia a superfície coberta pela planta é o dobro da superfície coberta no 29º dia. Como no 30º dia o lago todo está coberto, então a metade dele estará coberta no 29º dia.
 - Em 29 dias cada muda se reproduz e acaba cobrindo a metade do lago. Portanto, colocando-se duas mudas, em 29 dias elas cobrirão o lago todo.
- 2) Para pagar R\$ 100,00, o computador pode usar diferentes quantidades de notas de R\$ 5,00, desde nenhuma até 20.
Então, temos as seguintes possibilidades:

R\$ 5,00	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R\$ 1,00	100	95	90	85	80	75	70	65	60	55	50

R\$ 5,00	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
R\$ 1,00	45	40	35	30	25	20	15	10	5	0

- 3) A questão é saber quantos estudantes mexeram (abrindo ou fechando) no armário de número 100.
A lei a ser observada é a seguinte:

Número do aluno	Número dos armários em que o aluno mexe
1	1,2,3,4,5,6,... = múltiplos de 1
2	2,4,6,8,10,... = múltiplos de 2
3	3,6,9,12,15,... = múltiplos de 3
4	4,8,12,16,20,... = múltiplos de 4
etc.	

Sendo assim, para saber quantos estudantes mexeram no armário de número 100, basta descobrir quantos são os divisores de 100 (ou de quantos

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

números, entre 1 e 100, o número 100 é múltiplo). Como $100 = 2^2 \times 5^2$, então 100 possui $(2 + 1)(2 + 1) = 9$ divisores, a saber, 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 e 100. Dessa forma, 9 alunos mexeram no armário e o armário terminou aberto porque 9 é ímpar.

- 4) a) As equipes vão ser distribuídas em 8 grupos e, portanto, cada grupo terá 4 equipes. Cada uma dessas 4 equipes joga com as outras 3 equipes em um único turno. Então, o número de jogos realizados em cada grupo é $(4 \times 3) : 2 = 6$ e no total é $6 \times 8 = 48$.
 b) As 8 equipes classificadas são distribuídas em 2 grupos e, portanto, cada grupo terá 4 equipes. Novamente, o número de jogos realizados em cada grupo é $(4 \times 3) : 2 = 6$ e no total é $6 \times 2 = 12$.
 c) As 2 equipes classificadas fazem o jogo final. Então, o total de jogos é $48 + 12 + 1 = 61$.

- 5) a) Chamamos de x o número de ovos existentes inicialmente na cesta.

Realizada a 1ª venda, temos:

$$\text{ovos vendidos} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2}$$

$$\text{ovos restantes} = x - \frac{x+1}{2} = \frac{x-1}{2}$$

- b) Realizada a 2ª venda, temos:

$$\text{ovos vendidos} = \frac{1}{2} \left(\frac{x-1}{2} \right) + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{4}$$

$$\text{ovos restantes} = \frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{4} = \frac{x-3}{4}$$

- c) Realizada a 3ª venda, temos:

$$\text{ovos vendidos} = \frac{1}{2} \left(\frac{x-3}{4} \right) + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{8}$$

$$\text{ovos restantes} = \frac{x-3}{4} - \frac{x+1}{8} = \frac{x-7}{8}$$

- d) Pela condição dada no problema, temos:

$$\frac{x-7}{8} = 10 \text{ e daí } x = 87.$$

Outra solução:

Se na terceira venda sobraram 21 ovos ele deveria ter 43 ovos antes desta venda, pois vendeu $21,5 + 0,5$. Antes da segunda venda ele deveria ter 87 ovos, pois ele vendeu $43,5 + 0,5$.

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

- 6) Vamos resolver o problema usando pares de números, em que o primeiro número do par indica o total de litros que há no balde de 9 litros e o segundo número indica o total de litros do balde de 4 litros.
- 1º) Enchemos o balde maior com água do rio. Ele fica com 9 litros de água: (9,0).
- 2º) Com essa água do maior enchemos o menor, ou seja, passamos 4 litros do maior para o menor. O maior fica com 5 litros e o menor com 4 litros: (5,4).
- 3º) Jogamos no rio a água do menor: (5,0).
- 4º) Com os 5 litros que estão no balde maior, enchemos novamente o menor. O balde maior fica com 1 litro, e o menor com 4 litros: (1,4).
- 5º) Jogamos no rio outra vez a água do menor: (1,0).
- 6º) Passamos 1 litro de água que restou no balde maior para o menor: (0,1).
- 7º) Enchemos novamente o balde maior com 9 litros de água do rio: (9,1).
- 8º) Com essa água do maior completamos o balde menor. Com isso passamos 3 litros do balde maior para o menor e ele fica então com 6 litros: (6,4).
- 9º) Só para completar, jogamos novamente no rio a água do menor: (6,0).

Nota: Retiramos do rio 18 litros de água, pois enchemos duas vezes o balde maior, de 9 litros. Devolvemos ao rio 12 litros de água, pois por três vezes esvaziamos o balde menor, de 4 litros, no rio. Assim ficamos com 6 litros.

- 7) Como 20 adultos usam a capacidade total do elevador, 15 adultos usam $\frac{15}{20} \left(= \frac{3}{4} \right)$ da capacidade. Assim, a capacidade disponível é de $\frac{1}{4}$. Seriam necessárias 24 crianças para usarem a capacidade total. Logo, para usarem $\frac{1}{4}$ da capacidade são necessárias $\frac{1}{4} \times 24 = 6$ crianças.
- 8) Calculando a área de cada estágio temos:

$$\begin{aligned} \text{Estágio 1 (laranja)} &\rightarrow x \cdot x \cdot 1/2 = x^2/2 \\ \text{Estágio 2 (amarelo)} &\rightarrow x \cdot 2x \cdot 1/2 - x^2/2 = 2x^2/2 - x^2/2 = x^2/2 \\ \text{Estágio 3 (laranja)} &\rightarrow x \cdot 3x \cdot 1/2 - x^2 = 3x^2/2 - x^2 = x^2/2 \end{aligned}$$

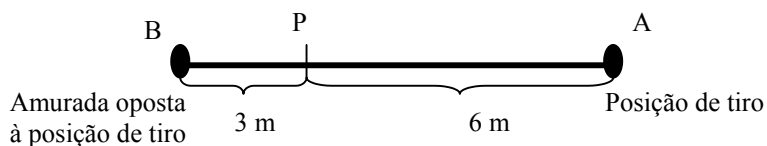
Portanto, os 3 estágios têm a mesma área $x^2/2 \text{ cm}^2$.

Para que a chama seja exatamente 6 cm^2 devemos ter:

$$x^2/2 + x^2/2 + x^2/2 = 6 \Rightarrow 3x^2/2 = 6 \Rightarrow x^2 = 2 \cdot 6 \cdot 1/3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \text{ cm}.$$

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

- 9) a) $1,5 \text{ kg} = 1500 \text{ g}$
 $1500 \div 200 = 7,5$
 O canhão ficou a 7,5 m da posição de tiro.
- b) $4 \text{ litros} = 4 \cdot 0,9 \text{ kg} = 3,6 \text{ kg} = 3600 \text{ g}$; $3600 \div 200 = 18 \text{ m}$.
 Então, o canhão recua 9 m, bate na amurada e volta 9 m, ficando assim novamente na posição de tiro. Logo, a distância é 0.
- c) Para cada tiro, haverá 1200 g de pólvora, o que fará o canhão andar 6 m, pois $1200 : 200 = 6$. Então, após o primeiro tiro o canhão para no ponto P:



Após o segundo tiro, o canhão também para em P, pois recua 3 m, bate na amurada (B) e volta 3 m. O mesmo ocorre após o terceiro tiro. Assim, a distância da posição inicial é de 6 m.

- 10) Entram 180 litros a cada 15 minutos. Em 1 minuto, entram 12 litros. Saem 9 litros a cada 5 minutos. Em 1 minuto, saem 1,8 litros. Logo, entram 10,2 litros a cada minuto. Se t = tempo para entrarem 255 litros no barco, temos:

Tempo (minutos)	Capacidade (litros)
t	255
1	10,2

$t = 25 \text{ min.}$

Então, a lancha deve fazer pelo menos 50 km em 25 minutos, ou 2 km em 1 minuto ou 120 km em 1 hora. Logo, a velocidade mínima necessária é de 120 km/h.

- 11) O maior número restante é 553451234512345. Para ver isto, podemos supor que os cortes são feitos da esquerda para a direita. Se deixarmos de cortar todos os quatro primeiros algarismos, o número que resta começará por 1, 2, 3 ou 4. Logo, menor que o número acima. Feito isto, se deixarmos de cortar a segunda sequência 1234, o número que resta terá na primeira ou segunda casa, da esquerda para a direita, 1, 2, 3 ou 4. Ainda menor que o número acima. Os dois primeiros 5 devem permanecer, pois retirando-se

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

um deles, completamos 9 retiradas e daí algum algarismo da terceira seqüência 1234 aparecerá na 1ª ou na 2ª casa. Finalmente devemos cortar a seqüência 12, que ocupa a 11ª e 12ª posições.

- 12) Basta distribuir as moedas em 7 caixas contendo respectivamente 1, 2, 4, 8, 16, 32 e 64 moedas. Para outros pagamentos Pedro pode fazer $3 = 1 + 2$, $5 = 1 + 4$, $6 = 2 + 4$, $7 = 1 + 2 + 4$. Assim já pode pagar as quantias de 1 a 7 reais com o conteúdo das caixas. Adicionando-se a parcela 8 a estas somas chega-se às somas de 9 até 15. Adicionando-se a parcela 16 às 15 somas assim formadas obtém-se somas de 17 a 31. A estas acrescenta-se a parcela 32. E finalmente a parcela 64, obtendo-se assim todas as somas de 1 a 127 $= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$.

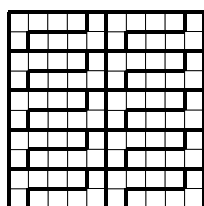
13)

- a) O elevador B para nos múltiplos de 5.
O elevador C para nos múltiplos de 7.
O elevador D para nos múltiplos de 17.
O elevador E para nos múltiplos de 23.

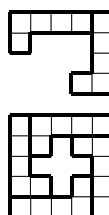
Como 5, 7, 17 e 23 são números primos, para que todos parem num mesmo andar, este tem que ser múltiplo de $5 \times 7 \times 17 \times 23 = 13685$ e o prédio só tem 1000 andares.

- b) Para que num andar parem exatamente quatro elevadores, devem parar A, que pára em todos, e três dos restantes.
B, C e D param nos múltiplos de $5 \times 7 \times 17 = 595$
B, C e E param nos múltiplos de $5 \times 7 \times 23 = 805$
B, D e E param nos múltiplos de $5 \times 17 \times 23 = 1955$
C, D e E param nos múltiplos de $7 \times 17 \times 23 = 2737$
Logo, os andares onde param 4 elevadores são o 595 e o 805.

- 14) O menor tabuleiro é do tipo 10×10 coberto com 20 peças, como mostrado, por exemplo, na figura abaixo, à esquerda.



Com efeito, o número de casas do tabuleiro é um quadrado perfeito múltiplo de 5. Logo é 25, 100, 225 ou ... etc. Mas um tabuleiro 5×5 não pode ser coberto com peças deste tipo, pois ao tentarmos completar uma lateral do tabuleiro, seremos conduzidos a uma das duas figuras à direita, as quais não se deixam completar pelas peças para formar todo o



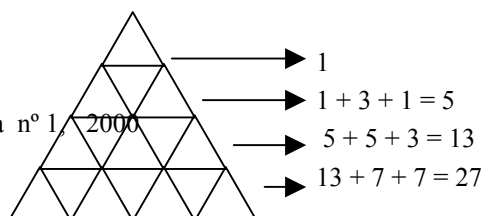
Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

tabuleiro.

- 15) Os números são 1, $\square 2$, $\square \square 3$, $\square \square \square 4$, ..., $\square \square \square \square \square \square \square 9$, num total de $1 + 9 + 90 + 900 + \dots + 90\,000\,000 = 100\,000\,000$.

Resolução Nível 2

- 1) Um palíndromo de cinco algarismos tem a forma $abcba$, em que a , b , c são algarismos e $a \neq 0$. Temos 9 possibilidades para a , 10 para b e 10 para c ; então, o total de possibilidades é $9 \times 10 \times 10 = 900$.
- 2) Comprando cada boi por R\$ 250,00, o fazendeiro teve um custo total de R\$ 250000,00. Para ter um lucro total de 40%, deverá arrecadar na venda dos 1000 bois o total de:
 $250000,00 \times 1,4 = 350000,00$
Na venda dos primeiros 400 arrecadou:
 $400 \times 250,00 \times 1,25 = 125000,00$
Assim, na venda dos outros 600 bois deverá arrecadar:
 $350000,00 - 125000,00 = 225000,00$
Cada boi deve ser vendido por:
 $225000,00 : 600 = 375,00$
Logo, o fazendeiro deverá vender cada boi por R\$ 375,00.
- 3) a) O ano 2000 é bissexto, por ser divisível por 400.
b) O ano 2100 não será bissexto, por terminar em 00 e não ser divisível por 400.
c) De 1601 a 2000, existem 400 anos, dos quais 100 são múltiplos de 4. Destes há 3 que não são bissextos: 1700; 1800 e 1900. Logo, são 97 anos bissextos no período citado.
- 4) Ao lado da seta, em cada linha estamos indicando uma maneira de contar o número total de triângulos, até a linha correspondente. Então, na figura dada, temos 27 triângulos.



Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

- 5) Suponhamos que existam inteiros a e c tais que: $a^2 + a^2 = c^2$.

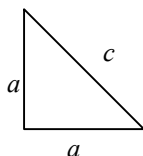
Então:

$$2a^2 = c^2$$

$$a\sqrt{2} = c$$

$$c/a = \sqrt{2}$$

Esta última igualdade afirma que $\sqrt{2}$ é racional, o que é absurdo. Portanto, a existência de tal triângulo é impossível, uma vez que implica a racionalidade de $\sqrt{2}$.



- 6) Sejam x e y o menor e o maior segmento, respectivamente.

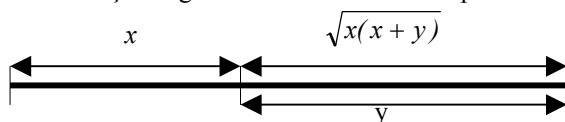
Então, por definição,

$$\frac{x}{\sqrt{x(x+y)}} = \frac{x}{y}. \text{ Logo, } x^2 + xy - y^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} - 1 = 0.$$

Resolvendo esta equação do 2º grau em x/y , encontramos:

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

A solução negativa não tem sentido no problema.



- 7) O número x procurado tem três Algarismos distintos.

Então, $100 < x < 999$; $10 < \sqrt{x} < 31$.

$10^2 = 100$; $11^2 = 121$; $12^2 = 144$; $13^2 = 169$; $14^2 = 196$; $15^2 = 225$; $16^2 = 256$; $17^2 = 289$; $18^2 = 324$; $19^2 = 361$; $20^2 = 400$; $21^2 = 441$; $22^2 = 484$;

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

$23^2 = 529$; $24^2 = 576$; $25^2 = 625$; $26^2 = 676$; $27^2 = 729$; $28^2 = 784$; $29^2 = 841$; $30^2 = 900$; $31^2 = 961$.

Considerando somente os que têm algarismos diferentes:

169; 196; 256; 289; 324; 361; 529; 576; 625; 729; 784; 841; 961.

Temos, então as combinações: 169, 196 e 961.

8) a) Como são 4 triângulos iguais, temos: $4 \frac{xx^2}{2} = \frac{4x^3}{2} = 2x^3$.

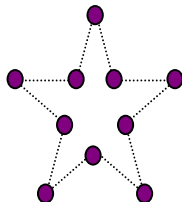
São 2 quadrados pequenos com área $2x^2$ e um grande, com área x^4 .

Logo, o polinômio é $A(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2$.

b) $A(3) = 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2$

$A(3) = 153$.

9)



10) A medida do lado de um triângulo é a metade da medida do triângulo imediatamente maior. Então, o lado do menor mede $1/8$ cm. Veja:

$$1 \div 2 = 1/2$$

$$1/2 \div 2 = 1/4$$

$$1/4 \div 2 = 1/8$$

Como o triângulo é equilátero, temos:

$$\frac{\left[\left(\frac{1}{8} \right)^2 \sqrt{3} \right]}{4} = \frac{\sqrt{3}}{256}.$$

11)

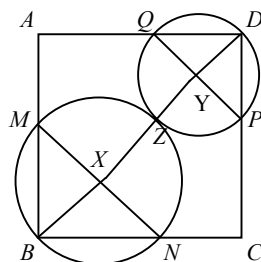
a) Estão escritos inicialmente 3 números pares. Quando um deles é apagado, é escrito em seu lugar um número ímpar. Após o 1º movimento ficam então dois números pares e um número ímpar. Se apagarmos agora o número ímpar, surgirá em seu lugar outro número ímpar e se apagarmos um número par aparecerá em seu lugar outro número par. Deste modo, após qualquer número de movimentos

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

restarão dois números pares e um número ímpar e portanto, não é possível termos no final os três números ímpares 17, 75 e 91.

- b) Sim, uma possível sequência de movimentos é : 3, 3, 3 $\rightarrow$ 5, 3, 3 $\rightarrow$ 5, 3, 7 $\rightarrow$ 5, 11, 7 $\rightarrow$ 17, 11, 7 $\rightarrow$ 17, 11, 27 $\rightarrow$ 17, 43, 27 $\rightarrow$ 17, 43, 59 $\rightarrow$ 17, 75, 59 $\rightarrow$ 17, 75, 91.

- 12) A figura abaixo representa a situação, onde X e Y são os pontos médios dos segmentos MN e PQ e Z é o ponto de tangência das circunferências. Então, como $\angle MBN = \angle PDQ = 90^\circ$, segue que $BX = MX = NX = XZ$ e $DY = QY = YP = YZ$. Assim, $MN + PQ = BX + XZ + ZY + YD \geq BD = AC$.



- 13) Temos $3^a \cdot 6^b \cdot 9^c \cdot 12^d = 2^{b+2d} \cdot 3^{a+b+2c+d}$. Para (a, b, c, d) dados, o maior n possível é $\text{mdc}\{b+2d, a+b+2c+d\} \leq b+2d$. Note que $b+2d$ é máximo (com b e d elementos distintos de $\{3, 6, 9, 12\}$) quando $d = 12$ e $b = 9$. Neste caso, $b+2d = 33$, e $a+b+2c+d = 21 + a+2c$. Tomando $a = 6$ e $c = 3$, temos também $a+b+2c+d = 33$, que é obviamente o maior valor possível para n , obtido para $(a, b, c, d) = (6, 9, 3, 12)$.

- 14) Como os denominadores das frações são primos entre si, seu mínimo múltiplo comum é BD e assim, a fração resultante é $\frac{AD+CB}{BD}$.

Suponhamos que esta fração não seja irredutível isto é, que exista algum número primo p que divida o numerador e o denominador desta fração. Como o produto BD é divisível por p , um dos seus termos, digamos B sem perda de generalidade o seja. Entretanto, uma das parcelas da soma $AD + CB$ é divisível por p e como a soma, por hipótese, é divisível por p a parcela AD é também divisível por p . Portanto A ou D é divisível por p . No primeiro caso temos uma contradição com o fato da fração $\frac{A}{B}$ ser irredutível; no outro caso a contradição está no fato de que os denominadores das frações iniciais sempre são primos entre si.

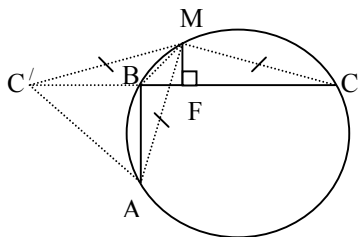
Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

- 15) É claro que n deve ser no máximo 10 e dividir 90. Assim, restam para n as possibilidades 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10. Fora $n = 6$, é imediato que n pode assumir qualquer um dos outros valores acima. Começando a tentar montar o retângulo com peças 1×6 a partir de um canto, concluímos prontamente que a tarefa não é possível.

Resolução Nível 3

- 1) Seja C' tal que $FC = FC'$, $C' \in FC$.

Trace os segmentos BM , $C'M$, AM , MC e AC' . Temos que o triângulo MFC é congruente ao triângulo MFC' (Caso LAL). Portanto, $MC = MC'$. Por outro lado, $MA = MC$, pois M é ponto médio do arco AC . De $MA = MC'$ resulta que os ângulos da base AC' são iguais, isto é, $\widehat{MAC'} = \widehat{MC'A}$. Como $\widehat{MC'B} = \widehat{MAB} = \widehat{MCF}$, pois subtendem o mesmo arco BM , temos $\widehat{BAC'} = \widehat{BC'A}$ que implica $AB = BC'$ e finalmente $AB + BF = FC$.



- 2) Como podemos ver na figura abaixo as medidas AD e EA são iguais ao raio da circunferência inscrita no triângulo, logo $AD = EA = r$. Analisando os triângulos DOB e FOB vemos que eles são congruentes pois são retângulos com hipotenusa e catetos iguais, obtendo $FB = DB$. Da mesma forma os triângulos EOC e FOC são congruentes, e $EC = FC$.

Agora fica fácil concluirmos que:

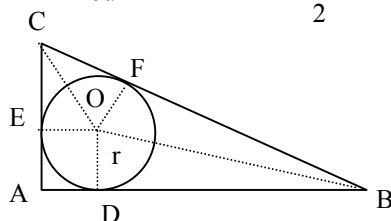
$$AB = DB + AD = DB + r, \text{ isto é, } DB = AB - r.$$

$$AC = EC + EA = EC + r \quad \text{ou} \quad EC = AC - r.$$

Então,

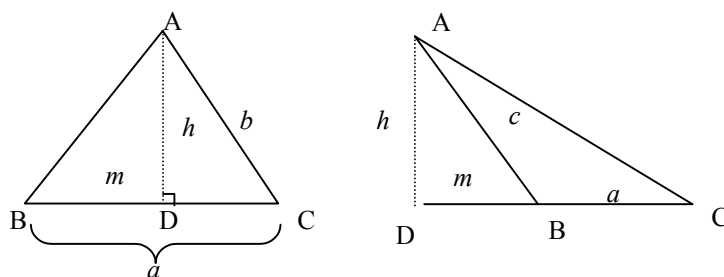
$$BC = FC + FB = AB - r + AC - r = AB + AC - 2r, \text{ isto é,}$$

$$BC = AB + AC - 2r \quad \text{ou} \quad r = \frac{AB + AC - BC}{2}.$$



Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

- 3) Sejam a, b, c as medidas dos lados de um triângulo ABC , de área S e perímetro $2p$.



Seja h a altura do triângulo, relativa ao lado BC . Então, $S = \frac{1}{2} a \cdot h$.

Determinaremos h em termos de a, b e c .

No triângulo retângulo ADB , de cateto BD de comprimento m , temos

$$h^2 = c^2 - m^2. \quad (1)$$

Como num triângulo qualquer, o quadrado do lado oposto a um ângulo é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, mais (menos) duas vezes o produto de um desses lados pela projeção do outro sobre ele, temos também

$$b^2 = a^2 + c^2 \pm 2am, \text{ isto é,} \\ m^2 = \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right)^2. \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), segue que

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right)^2 = \frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}.$$

Então,

$$\begin{aligned} h^2 &= [2ac + a^2 + c^2 - b^2][2ac - a^2 - c^2 + b^2] \\ &= [a^2 + c^2 + 2ac - b^2][b^2 - (a^2 + c^2 - 2ac)] \\ &= [(a + c)^2 - b^2][b^2 - (a - c)^2] \end{aligned}$$

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

$$= (a + c + b)(a + c - b)(b + a - c)(b - a + c).$$

Como $a + b + c = 2p$, temos

$$a + c - b = 2p - 2b = 2(p - b)$$

$$a + b - c = 2(p - c)$$

$$b + c - a = 2(p - a).$$

Logo,

$$4a^2h^2 = 2p \cdot 2(p - b) \cdot 2(p - c) \cdot 2(p - a).$$

Donde,

$$h = \frac{2}{a} \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

Concluimos então, que

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

- 4) As condições do problema são (usando a fórmula de Heron para a área de um triângulo qualquer em função dos lados):

$$\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} = 2p,$$

onde a, b e c são inteiros positivos, e $p = \frac{a + b + c}{2}$. Sejam $x = p - a, y = p - b$ e

$z = p - c$. Obtemos então, $\sqrt{(x + y + z)xyz} = 2(x + y + z)$. Logo, simplificando a equação,

$$xyz = 4(x + y + z). \quad (1)$$

(Recorde que x, y e z são números racionais com denominador 2.) Vamos supor que $x \geq y \geq z$. Isolando x na equação (1) temos:

$$x = \frac{4y + 4z}{yz - 4}.$$

Consequentemente;

$$\frac{4y + 4z}{yz - 4} \geq y.$$

Multiplicando ambos os lados da equação por $yz - 4$, obtemos:

$$y^2z - 8y - 4z \leq 0 \quad (2)$$

isto é,

$$(y - y_1)(y - y_2) \leq 0,$$

onde y_1 e y_2 são as raízes da equação do 2º grau com variável y ,

$$zy^2 - 8y - 4z \leq 0 \quad (z \text{ constante}):$$

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

$$y_1 = \frac{4 + \sqrt{16 + 4z^2}}{z} \text{ e}$$

$$y_2 = \frac{4 - \sqrt{16 + 4z^2}}{z}.$$

Como podemos ver y_2 é negativo, o que implica que $y - y_2 > 0$. Consequentemente, uma condição necessária para para que a igualdade (2) se verifique é:

$$y - y_1 \leq 0, \text{ isto é,}$$

$$y \leq \frac{4 + \sqrt{16 + 4z^2}}{z}.$$

Logo, devemos ter $yz \leq 4 + \sqrt{16 + 4z^2}$, que implica $z^2 - 4 \leq \sqrt{16 + 4z^2}$ (para $z \leq y$). Elevando ambos os membros da última igualdade ao quadrado, obtemos;

$$z^4 - 8z^2 + 16 \leq 16 + 4z^2, \text{ isto é,}$$

$$z^4 \leq 12z^2$$

que se verifica somente para $z \leq 3$.

Consideremos 3 possibilidades:

i) $z = 1$,

$$y \leq \frac{4 + \sqrt{16 + 4}}{1} < 9; \quad x = \frac{4y + 4z}{yz - 4} = \frac{4y + 4}{y - 4}.$$

Para $y < 9$, obtemos um inteiro positivo x , somente nos seguintes casos:

$y = 5$ nos dá $x = 24$,

$y = 6$ nos dá $x = 14$ e

$y = 8$ nos dá $x = 9$.

ii) $z = 2$,

$$y \leq \frac{4 + \sqrt{16 + 4 \cdot 4}}{2} < 5; \quad x = \frac{4y + 4z}{yz - 4} = \frac{4y + 8}{2y - 4} = \frac{2y + 4}{y - 2}.$$

Neste caso,

$$y = 3, x = 10 \text{ e}$$

$$y = 4, x = 6.$$

iii) $z = 3$, $y = \frac{4 + \sqrt{16 + 4 \cdot 9}}{3} < 4$. Para $z = y = 3$, $x = \frac{4y + 4z}{yz - 4}$, não obtemos nenhum inteiro positivo x .

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Obtemos então as soluções para o problema,

x	y	z	$x + y + z = p$	a	b	c
24	5	1	30	6	25	29
4	6	1	21	7	15	20
9	8	1	18	9	10	17
10	3	2	15	5	12	13
6	4	2	12	6	8	10.

5) Temos,

$$0 = (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + 6abc$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a + b) + 3ac(a + c) + 3bc(b + c) + 6abc$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc - 3abc - 3abc + 6abc$$

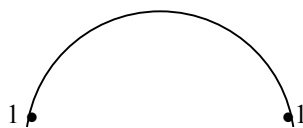
$$= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

Logo, $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, como queríamos provar.

6) Vamos resolver o problema para um semi-círculo. Seja $S(n)$ a soma dos termos do n -ésimo passo. Assim,

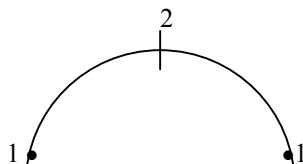
1º passo:

$$S(1) = 1 + 1 = 2$$



2º passo:

$$S(2) = 1 + 1 + 2 = S(1) + 1 + 1 = 4$$



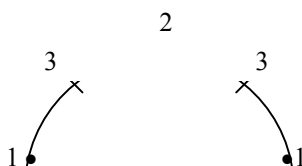
3º passo:

$$S(3) = S(2) + 3 + 3$$

$$= S(2) + (1 + 2) + (2 + 1)$$

$$= S(2) + S(2) - 1 + S(2) - 1$$

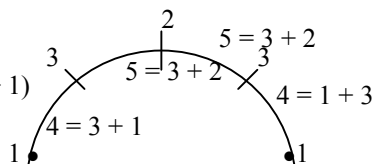
$$= 3 S(2) - 2$$



Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

4º passo:

$$\begin{aligned} S(4) &= S(3) + (1+3) + (3+2) + (2+3) + (3+1) \\ &= S(3) + 2S(3) - 2 \\ &= 3S(3) - 2 \end{aligned}$$



Vamos supor que $S(n) = 3S(n-1) - 2$

calcular $S(n+1)$. Sejam $a_1, \dots, a_r$ os pontos do arco superior, então:

$$\begin{aligned} S(n+1) &= S(n) + (1+a_1) + (a_1+a_2) + \dots + (a_{r-1}+a_r) + (a_r+1) \\ S(n+1) &= S(n) + 2S(n) - 2. \end{aligned}$$

Logo, $S(n) = 3S(n-1) - 2$.

Mas,

$$\begin{aligned} S(1) &= 2 = 3^0 + 1 \\ S(2) &= 4 = 3^1 + 1 \\ S(3) &= 10 = 3^2 + 1 \\ S(4) &= 28 = 3^3 + 1 \end{aligned}$$

É natural supor que $S(n) = 3^{n-1} + 1$, para todo n inteiro positivo.

Usando novamente o princípio de indução, vamos calcular $S(n+1)$.

$$S(n+1) = 3S(n) - 2 = 3(3^{n-1} + 1) - 2 = 3^n + 1.$$

Logo $S(n) = 3^{n-1} + 1$, para todo n inteiro positivo.

Portanto,

$$\begin{aligned} S(1999) &= 3^{1998} + 1 \text{ e considerando o outro semi-círculo obtemos a soma total} \\ 2(3^{1998} + 1) - 2 &= 2 \cdot 3^{1998}. \end{aligned}$$

- 7) Sejam m_n, a_n e c_n as probabilidades de que no dia n ele use óculos magenta, amarelo e ciano, respectivamente. Temos $m_1 = 1, a_1 = c_1 = 0$ e

$$m_{n+1} = \frac{a_n + c_n}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{m_n + c_n}{2}, \quad \text{e} \quad c_{n+1} = \frac{m_n + a_n}{2}.$$

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Como $a_n + c_n + m_n = 1$, temos $m_{n+1} = \frac{1-m_n}{2}$. Assim, $m_n = \frac{1-(-2)^{2-n}}{3}$, e em 31 de agosto a probabilidade de que ele volte a usar o magenta é

$$m_{31} = \frac{1+2^{-29}}{3}.$$

8) Temos

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) = 3^3 \cdot 37. \quad (1)$$

Suponhamos que $x > y$. Assim, os possíveis valores de $a = x - y$ são 1, 3, 9, 27, 37, 3 · 37, 9 · 37, 27 · 37. Para cada valor de a podemos fazer $y = x - a$ e o segundo fator de (1) fica

$$x^2 + x(x-a) + (x-a)^2 = \frac{999}{a} \quad (2)$$

Devemos verificar para quais valores de a as raízes de (2) são inteiras. Para isso devemos ter

$$\Delta = -3a^2 + \frac{12 \times 999}{a}, \text{ um quadrado perfeito.}$$

Para $a = 1$,

$$\Delta = -3 + 12 \times 999 = 3(4 \times 999 - 1) = 3[3(4 \times 333 - 1) + 2].$$

Assim o número $3(4 \times 333 - 1) + 2$ não é múltiplo de 3 e Δ não é um quadrado perfeito. Assim para $a = 1$ o problema tem soluções inteiras.

Para $a = 3$,

$$\Delta = -3 \times 9 + \frac{12 \times 999}{3} = -3^3 + 3^2 \times 4 \times 111 = 3^2(444 - 3) = 3^2 \times 21^2.$$

Logo, Δ é um quadrado perfeito e

$$x = \frac{9 \pm 3 \times 21}{6} = \frac{9(1 \pm 7)}{6} = \frac{3(1 \pm 7)}{2}$$

$x = 12$ e $y = 9$, $x = -9$ e $y = -12$.

Para $a = 37$,

$$\Delta = -3 \times 37^2 - 12 \times 3^3 = -3(37^2 - 12 \times 3^2).$$

Para Δ ser um quadrado perfeito o número $37^2 - 12 \times 3^2$ deveria ser múltiplo de 3, o que não acontece pois nesse caso 37^2 seria também múltiplo de 3.

Logo para $a = 37$ o problema não tem soluções inteiras.

Continuando a verificação para os demais valores de a encontramos como respostas:

$x = 12$ e $y = 9$, $x = -9$ e $y = -12$, $x = 10$ e $y = 1$, $x = -1$ e $y = -10$.

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

- 9) Os restos das divisões de 1, 11, 111, 1111, 11111, 111111 por 7 são respectivamente 1, 4, 6, 5, 2, 0, e isto se repete em ciclos de 6. Como o resto da divisão de 1999 por 6 é 1, concluímos que o resto da divisão de N por 7 é também 1.
- 10) Se x é o maior lado, devemos ter $x^2 < 10^2 + 12^2$, ou seja, $x < \sqrt{244} \cong 15,6$. Se $10 < x < 12$ o triângulo é acutângulo. Se x é o menor lado, devemos ter $x^2 > 12^2 - 10^2$, ou seja, $x > \sqrt{44} \cong 6,6$. Assim, $x = 7, 8, 9, \dots, 15$. Logo, existem 9 valores possíveis para x .
- 11) Como a razão das áreas de triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança temos $\frac{(\text{área do triângulo } BMN)}{(\text{área do triângulo } ABC)} = \frac{1}{2} = \frac{BM^2}{AB^2}$. Daí, $BM = 42\sqrt{2} \cong 59,397$.
- 12) Usaremos o fato de que $2^{1999} \times 5^{1999} = 10^{1999}$. Suponhamos que 2^{1999} possua m algarismos e que 5^{1999} possua n algarismos. Então :
- $$10^{m-1} < 2^{1999} < 10^m, 10^{n-1} < 5^{1999} < 10^n$$
- e assim
- $$10^{m+n-2} < 10^{1999} < 10^{m+n}$$
- Daí $1999 = m + n - 1$ e assim $m + n = 2000$.
- 13) Claramente, 37 bolas não são suficientes uma vez que entre elas podem estar as 10 bolas brancas e pretas e 9 de cada uma das outras. Por outro lado, 38 bolas garantem que temos pelo menos 28 bolas que não são nem brancas e nem pretas e uma vez que $28 = 3 \cdot 9 + 1$, pelo Princípio da Casa do Pombo temos certamente 10 bolas da mesma cor.

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Relação dos Classificados na VIII Olimpíada /1999

Nível 1 (5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental)

Total de pontos: 60

Premiados

N.º	Class	Nome	Ptos	Série	Escola	Cidade
01	1º lugar	Ernesto Quaresma Mendonça	59	6ª	Disciplina	Goiânia
02	1º lugar	Guilherme Rodrigues Salermo	59	6ª	IPE	Goiânia
03	2º lugar	João Paulo Fernandes dos Reis	55	6ª	Disciplina	Goiânia
04	3º lugar	Max Well Rabelo	54	6ª	Esc.Porto Seguro	Goiânia
05	3º lugar	Raquel Cristina Zendron	54	6ª	Esc. Ens.Fund.Crescer	Anápolis

Menções Honrosas

06	4º lugar	Gustavo Menezes Santana	49	6ª	Esc. Nova Opção	Goiânia
07	5º lugar	Júlia Junior Lotufo	48	6ª	Phoenix	Goiânia
08	5º lugar	Leandro Santos Ribeiro	48	6ª	IPE	Goiânia
09	6º lugar	Fernando França de Souza	46	5ª	ColEstJales Machado	Goianésia
10	7º lugar	André Cesarino de Paula	44	6ª	Agostiniano	Goiânia
11	7º lugar	Gabriel Lohman Codo	44	6ª	Esc.Ens.Fund.Crescer	Anápolis
12	7º lugar	Mateus Quaresma Mendonça	44	5ª	Disciplina	Goiânia
13	8º lugar	Gustavo Tadeu Reis Silva	43	6ª	Ávila	Goiânia
14	9º lugar	Fernando Friaça Asmar de Souza	42	6ª	Ateneu Dom Bosco	Goiânia
15	10º lugar	Rodrigo Scalia Fernandes	41	6ª	C.E.Paulo Freire - Anglo	Catalão
16	11º lugar	Thalita Gouvea Guimarães	40	6ª	Escola Antares	Goiânia

Menções Especiais

17	12º lugar	João Paulo V. O. Arantes	39	6ª	Agostiniano	Goiânia
18	13º lugar	Denis Masashi Sugita	38	6ª	Agostiniano	Goiânia
19	13º lugar	Hermano Marchiô de Sousa	38	6ª	Educ. Nasc.do Araguaia	Mineiros
20	14º lugar	Carolina Damaceno Silveira	37	6ª	Esc.Ens.Fund.Crescer	Anápolis
21	14º lugar	Lira Rocha da Mota	37	5ª	Educ. Yara Berocan	Goiânia
22	14º lugar	Rafael Jardim Aafama	37	6ª	CE Pol Rui Barbosa	Rialma
23	14º lugar	Talita Viana Neves	37	6ª	Marista	Goiânia
24	15º lugar	Raphael de Faria Carmo	36	6ª	Lassale	Goiânia
25	16º lugar	Hernane M. Machado	35	5ª	Diocesano	Itumbiara

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

26	16º lugar	Marcus Vinícius C Sereno	35	6ª	Galileu	Anápolis
27	16º lugar	Raphael ° Costa	35	6ª	Disciplina	Goiânia
28	17º lugar	Thiago Martins Amaral	34	6ª	Lassale	Goiânia
29	18º lugar	João Antônio Marques Araújo	33	5ª	Aphonsiano	Trindade
30	18º lugar	Mariana Veiga Florentino	33	6ª	Marista	Goiânia
31	18º lugar	Nelson Loureiro dos Santos Filho	33	6ª	Marista	Goiânia
32	19º lugar	José Luciano Gomes de Almeida	32	5ª	Col Est São Cristóvão	Goiânia
33	19º lugar	Ralph Canhete Ribeiro	32	6ª	Pré-Médico	Goiânia
34	20º lugar	Amanda C. F. de Queiroz	31	6ª	Metropolitano	Trindade
35	20º lugar	Daniele Pereira Rezende	31	6ª	Educ.Nasc. do Araguaia	Mineiros
36	20º lugar	Fábio Fernandes de Oliveira	31	6ª	EM Dep José de Assis	Anápolis
37	20º lugar	Juliana Nóbrega Mesquita	31	6ª	IPE	Goiânia
38	21º lugar	Hilton Luis Alves Filho	30	6ª	Rioverdense - Objetivo	Rio Verde
39	21º lugar	Marina da Silva Vieira	30	6ª	Anglo de Goiânia	Goiânia
40	21º lugar	Pedro Cupolillo de Faria	30	6ª	Delta	Goiânia
41	21º lugar	Rodrigo Lúcio de Castro	30	6ª	IPE	Goiânia
42	21º lugar	Rogério Marques da Silva	30	6ª	Col Est Abraão André	Catalão

Nível 2 (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental)

Total de pontos: 60

Premiados

Nº	Class	Nome	Ptos	Série	Escola	Cidade
01	1º lugar	Jorge Peixoto de Moraes	55	7ª	Mega Educ	Goiânia
02	2º lugar	Climbiê Ferreira Hall	45	8ª	Phoenix	Goiânia
03	3º lugar	Helena Buys G. R. F.da Silva	41	8ª	Phoenix	Goiânia
04	3º lugar	Vitor Ken Mochizuki	41	7ª	Mega Educ	Goiânia

Menções Honrosas

05	4º lugar	Flávio Boaventura Garcia	36	8ª	Galileu	Anápolis
06	5º lugar	Gabriel Jenior Lotufo	35	8ª	Phoenix	Goiânia
07	6º lugar	Marcio Antônio F. Belo Filho	33	8ª	IPE	Goiânia
08	7º lugar	Ana Cláudia M. do Nascimento	32	8ª	Integral	Catalão

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Nível 3 (Ensino Médio)

Total de pontos: 50

Premiados

Nº	Class	Nome	Ptos	Série	Escola	Cidade
01	1º lugar	Fernando Prado Rocha	49	2ª	Mega Educ	Goiânia
02	1º lugar	Humberto Silva Naves	49	1ª	Mega Educ	Goiânia
03	1º lugar	Luís Eduardo e Silva Naves	49	3ª	Mega Educ	Goiânia
04	2º lugar	Lafayette Spósito Jota	43	3ª	WR	Goiânia
05	3º lugar	Leandro Alves Carneiro	42	3ª	WR	Goiânia

Menções Honrosas

06	4º lugar	Renner Assis Lima	41	3ª	WR	Goiânia
07	5º lugar	Paulo Regis Távora D Júnior	38	2ª	Mega Educ	Goiânia
08	6º lugar	Eduardo Meireles	37	3ª	WR	Goiânia
09	7º lugar	Alexandre Rezende Ferreira	33	3ª	WR	Goiânia
10	7º lugar	Carlos Stein	33	1ª	Visão	Goiânia
11	7º lugar	Rodrigo Tapia Passos de Oliveira	33	3ª	Ateneu Dom Bosco	Goiânia
12	7º lugar	Thiago Marques Silva	33	2ª	Delta	Goiânia
13	7º lugar	Vitor Menezes Santana	33	3ª	WR	Goiânia

Menções Especiais

14	8º lugar	Hugo Ricardo Valim de Castro	28	3ª	Visão	Goiânia
15	8º lugar	Luana Marinho do Nascimento	28	3ª	WR	Goiânia
16	9º lugar	Bruno Borges de Souza Lima	25	2ª	Mega Educ	Goiânia
17	9º lugar	Laura Fernandes Carrijo	25	2ª	Dinâmico	Goiânia

VIII Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Resolução da prova do Nível 1

Questão 1 – Observe a sequência formada com as letras A, B e C:

ABC BCA CAB ABC BCA ...

- a) Qual a letra que se encontra na posição 23?
- b) Qual a letra que se encontra na posição 1999?

Justifique sua resposta

Solução:

Observe que a sequência ABC BCA CAB ABC BCA ... é constituída pela repetição dos 3 primeiros agrupamentos de letras (ABC BCA CAB), assim tanto em a) como em b) devemos verificar quantos grupos de 9 letras existem ou seja:

- a) $23 = 9 \times 2 + 5$, daí se conclui que a 23 letra é a 5ª letra da sequência básica, ou seja a letra C;
- b) $1999 = 9 \times 222 + 1$, logo a 1999ª letra é a 1ª do agrupamento básico ou seja a letra A.

Outra solução para o item a)

Encontre diretamente na sequência a 23ª letra:

ABC BCA CAB ABC BCA CAB ABC BCA CAB ABC BCA CAB...

Questão 2 – Um casal tem filhos e filhas. Cada filho tem um número de irmãos igual ao número de irmãs. Cada filha tem um número de irmãos igual ao dobro do número de irmãs. Quantos filhos e filhas tem o casal?

Justifique sua resposta

Solução:

Sejam

x = número de filhos;

y = número de filhas;

$x - 1$ = número de irmãos que cada filho tem;

$y - 1$ = número de irmãs que cada filha tem.

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Sentença em português	Sentença matemática
cada filho tem um n.º de irmãos igual ao número de irmãs	$x - 1 = y$
cada filha tem um n.º de irmãos igual ao dobro de n.º de irmãs	$x = 2 (y - 1)$

Temos então o sistema:

$$x = 2 (y - 1)$$

$$x - 1 = y$$

Resolvendo o sistema temos: $x = 4$ e $y = 3$.

Questão 3 – Carlos e Pedro possuem a mesma quantia em dinheiro. Carlos entretanto tem mais dinheiro que Fábio, que tem mais que José. Um outro colega, Mário, tem menos dinheiro do que Carlos e mais dinheiro que José e quantia diferente de Fábio. Além disso, Pedro tem menos dinheiro que seu amigo Ricardo.

- Escreva os nomes de Carlos, Pedro, Fábio, Mário e Ricardo segundo a ordem crescente das quantidades de dinheiro.
- Considerando que, deles todos, o mais pobre tem noventa reais e que a diferença entre o valor possuído por cada um deles e o imediatamente mais rico é de duzentos reais, quantos reais tem Ricardo?

Justifique sua resposta

Solução:

Sentença em português	Sentença matemática
Carlos e Pedro possuem a mesma quantia	$C = P$
Carlos tem mais dinheiro que Fábio,	$C > F$
(Fábio) que tem mais dinheiro que José	$F > J$
Mário, tem mais dinheiro do que José	$M > J$
(Mário) e quantia diferente de Fábio	$M \neq F$
Além disto, Pedro tem menos dinheiro que seu amigo Ricardo	$P < R$

Podemos representar estas relações em uma reta ordenada ou construir uma tabela para ver a ordem do conjunto.

O problema proposto tem 2 soluções:

PRIMEIRA SOLUÇÃO:

J	F	M	C = P	R
----------	----------	----------	--------------	----------

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

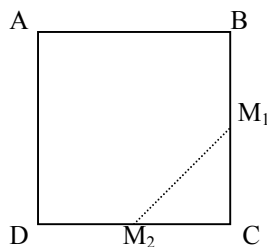
SEGUNDA SOLUÇÃO:

J	M	F	C = P	R
---	---	---	-------	---

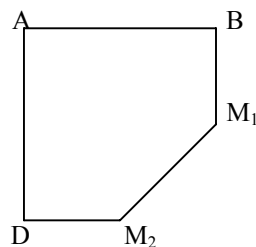
A parte b) é bastante simples, usando qualquer uma das tabelas acima. (O resultado final não depende desta escolha)

J	M	F	C = P	R
90	290	490	690	890

Questão 4 – A partir de um quadrado de lado igual a 1, constrói-se um pentágono retirando-se um triângulo retângulo cujos vértices são os pontos médios de dois lados consecutivos do quadrado e o vértice do quadrado, conforme a figura abaixo.

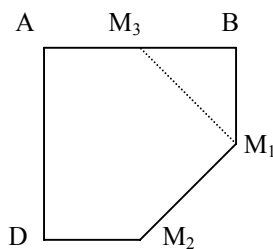


Etapa 0

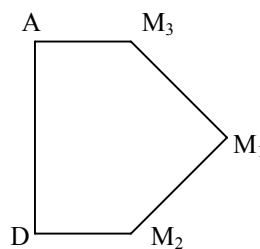


Etapa 1

Obtemos um novo pentágono retirando-se novamente um triângulo retângulo, agora o de vértice B.



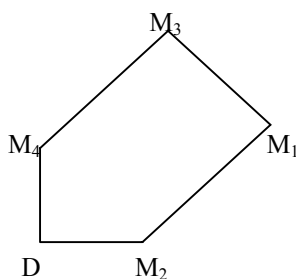
Etapa 2



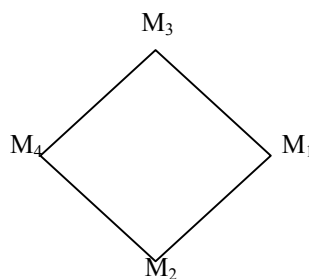
Etapa 3

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Continuando o processo teremos na 4ª etapa um quadrado novamente.



Etapa 4



Etapa 5

Determine as áreas dos polígonos de cada etapa.

Justifique sua resposta

Solução:

A área na etapa 0 é a área do quadrado ou seja 1.

Para obter a etapa 1 pode ser feita a seguinte construção: divida cada lado do quadrado original ao meio. Una os pontos assim obtido e que estejam em lados opostos por um segmento de reta. Obtém-se 4 quadrados, e em seguida una os pontos M_1 e M_2 , o que divide o quadrado menor em 2 triângulos que tem mesma área. Assim a área retirada na primeira etapa é $1/2$ de $1/4$ ou seja $1/8$, portanto a área restante na etapa 1 é $7/8$, na etapa 2 é $6/8$, na etapa 3 é $5/8$ e na etapa 4 é $4/8$ (ou $1/2$)

Questão 5 – Deseja-se cercar com arame uma área na forma de um quadrilátero de lados 150m, 100m, 90m, 75m. A cerca deve conter postes igualmente espaçados e ainda conter um poste em cada vértice. Calcule o número mínimo de postes necessários para cercar a área.

Justifique sua resposta

Solução:

Vamos encontrar os divisores comuns destes números. A fatoração de cada número dado (medidas dos lados) é:

$$150 = 2 \times 3 \times 5^2$$

$$100 = 2^2 \times 5^2$$

$$90 = 2 \times 3^2 \times 5$$

$$75 = 3 \times 5^2$$

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Portanto, 5 é o máximo divisor comum destes 4 números. Logo, o número mínimo de postes necessários para cercar esta área com as condições do problema é:

$$150/5 + 100/5 + 90/5 + 75/5 = 30 + 20 + 18 + 15 = 83 \text{ postes.}$$

Questão 6 – Os números dispostos abaixo formam o Triângulo de Pascal

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Para entendermos melhor esta tabela vamos mostrar como ela é construída.

- A primeira linha, que chamaremos de linha 0, possui apenas o número 1;
- A segunda linha, que chamaremos de linha 1, possui os números 1 e 1;
- Nas outras linhas sempre teremos o primeiro e último números iguais a 1, e os outros são obtidos somando-se o imediatamente superior com o elemento que o antecede na linha. Por exemplo, na linha 5, o 10 foi obtido somando-se o 6, que está imediatamente superior ao 10, e o 4 que está á esquerda de 6. Como mais um exemplo vamos preencher a linha 6 da tabela abaixo.

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	5+1	10+5	10+10	5+10	5+1	1

a) Complete o Triângulo de Pascal abaixo

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

1										
1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1		21						1		
	8								1	
1					126			9		
	10									1

- b) Qual a sequência de números que se obtém quando somamos os elementos de cada linha?
- c) Quais as outras “coincidências”, ou melhor, propriedades que você observa no Triângulo de Pascal?

Justifique sua resposta

Solução:

a)

1										
1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

b) A sequência que se obtém é:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048,... ou seja

1, 2, 2^2 , 2^3 , 2^4 , 2^5 , 2^6 , 2^7 , 2^8 , 2^9 , 2^{10} , 2^{11} , ... ou ainda

$(1+1)^0$, $(1+1)^1$, $(1+1)^2$, $(1+1)^3$, $(1+1)^4$, $(1+1)^5$, $(1+1)^6$, $(1+1)^7$, $(1+1)^8$, $(1+1)^9$,

$(1+1)^{10}$, $(1+1)^{11}$, ...e em cada linha temos os números obtidos pelo desenvolvimento do correspondente binômio.

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

c) Outras coincidências:

c1) A segunda coluna é formada, de cima para baixo, pelos números naturais (existe outra sequência igual a esta, que pode ser identificada pela simetria do triângulo);

c2) Existe uma simetria em cada linha, sendo que:

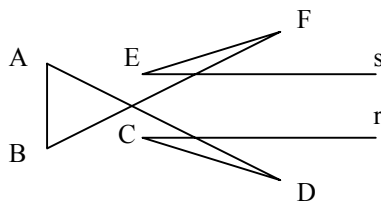
- os números situados em posições simétricas são sempre iguais,
- as linhas pares há um elemento ocupando a posição central.

c3) Observe que cada número do triângulo é obtido pela soma dos elementos que estão na coluna anterior e acima de sua linha (esta regra não é válida quando tem-se o número 1 na célula). Como exemplo pegue o número 21, que está na linha 7 e na terceira coluna, e o número 84 da linha 9 e na sétima coluna, ver o sombreamento no triângulo.

1										
1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Resolução da prova do Nível 2

Questão 1 – Na figura abaixo os segmentos de reta r e s são paralelos. Então a soma dos ângulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, \hat{E}$ e $\hat{F}$ será de quantos graus?



Justifique sua resposta

Solução:

Seja P o ponto onde se encontram BF e AD . Por P passamos a reta t , paralela a r e s . Essa reta divide o ângulo $\hat{APB}$ em um ângulo igual a $\hat{E} + \hat{F}$ e outro igual a $\hat{C} + \hat{D}$. Portanto a soma dos ângulos internos do triângulo APB é $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} + \hat{F} = 180^\circ$.

Questão 2 – Um número inteiro é um quadrado perfeito quando sua raiz quadrada é um número inteiro, por exemplo, 16 é um quadrado perfeito pois $\sqrt{16} = 4$. Mostre que a soma dos quadrados de dois números inteiros ímpares não pode ser um quadrado perfeito.

Justifique sua resposta

Solução:

Lembrando que qualquer número ímpar pode ser escrito na forma $2n + 1$, com n inteiro, a soma dos quadrados de dois ímpares é do tipo

$(2p + 1)^2 + (2q + 1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 + 4q^2 + 4q + 1 = 2[2(p^2 + q^2 + p + q) + 1]$,
que é o dobro de um número ímpar e portanto, é divisível por 2 mas não por 4.
Logo não pode ser um quadrado de um número inteiro.

Questão 3 – Seja ABC um triângulo qualquer e AH a altura em relação ao lado BC . Sejam M_1 e M_2 os pontos médios dos lados AB e AC respectivamente. Mostre que o ângulo $M_1\hat{H}M_2$ é igual ao ângulo $\hat{A}$.

Justifique sua resposta

Solução:

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

A reta r paralela a BC passando por M_1 passa também por M_2 , o que pode ser verificado pelo teorema de Tales. Como $AH \perp BC$, temos também $AH \perp r$. Se P é o ponto de encontro de AH com r , é fácil verificar que os triângulos APM_2 e HPM_2 são congruentes, o mesmo ocorrendo com APM_1 e HPM_1 . Segue-se que $M_1 \hat{H} M_2 = M_1 \hat{A} M_2$.
Veja outra solução na página 44.

Questão 4 – A sequência de Fibonacci $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ é tal que $a_1 = a_2 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, para $n \geq 3$.

- a) Obtenha os 5 primeiros termos desta sequência.
- b) Mostre que $a_n a_{n+1} - a_{n-1} a_n = (a_n)^2$, para todo $n \geq 2$.
- c) Mostre que $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 = a_n a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Justifique sua resposta

Solução:

a) $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5$.

b) Para $n \geq 2$, temos $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Multiplicando os dois membros por a_n chegamos a $a_n a_{n+1} = a_n^2 + a_{n-1} a_n$ e basta agora isolar o termo a_n^2 .

c) Com a igualdade obtida em b), podemos escrever

$$a_1^2 = a_1^2$$

$$a_2^2 = a_2 a_3 - a_1 a_2$$

$$a_3^2 = a_3 a_4 - a_2 a_3$$

N

$$a_{n-1}^2 = a_{n-1} a_n - a_{n-2} a_{n-1}$$

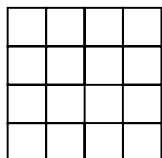
$$a_n^2 = a_n a_{n+1} - a_{n-1} a_n$$

Somando o lado esquerdo dessas igualdades devemos obter a soma do lado direito, ou seja, $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = a_n a_{n+1}$. Note que $a_1^2 = a_1 a_2 = 1$.

Questão 5 – Quantos retângulos diferentes consistindo de um número inteiro de quadrados podem ser obtidos:

- a) em um tabuleiro 4×4 (ver figura abaixo)?

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás



b) em um tabuleiro 8 x 8?

(considerando dois retângulos diferentes se eles possuírem dimensões diferentes, ou se ocuparem posições diferentes no tabuleiro).

Justifique sua resposta

Solução:

a) Para resolver a questão é necessário contar quantos retângulos de cada tamanho podem ser obtidos, ou seja, se k é a largura de um retângulo (em número de quadrados) e l é seu comprimento, quantos retângulos $k \times l$ podem ser formados? No caso de um tabuleiro pequeno como o 4×4 , essa contagem pode ser feita por observação direta do tabuleiro, com o que podemos construir a tabela

Formato	Quantidade	Formato	Quantidade
3×1	8	1×1	16
3×2	6	1×2	12
3×3	4	1×3	8
3×4	2	1×4	4
4×1	4	2×1	12
4×2	3	2×2	9
4×3	2	2×3	6
4×4	1	2×4	3

Basta, então, somar as quantidades para obter um total de 100 retângulos.

b) Para um tabuleiro maior, a contagem dos retângulos torna-se muito trabalhosa, o que nos força a procurar um meio de sistematizar essa contagem. Contar o número de retângulos $k \times l$ que podem ser formados num tabuleiro 8×8 , por exemplo, equivale a contar em quantas posições diferentes um retângulo $k \times l$ pode estar, o que por sua vez equivale a contar em quantas posições diferentes podemos colocar o canto superior direito do retângulo $k \times l$.

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Ora, em um tabuleiro de largura 8, um retângulo de largura k pode ter seu canto superior direito colocado em $8 - k + 1 = 9 - k$ linhas diferentes. Para cada uma dessas linhas, se comprimento do retângulo é l , o canto superior direito pode ser colocado em $8 - l + 1 = 9 - l$ colunas diferentes, o que nos dá um total de $(9 - k)(9 - l)$ posições possíveis, ou seja, retângulos $k \times l$. Desse modo, o número de retângulos com largura k é dado por

$$(9 - k)(9 - 1) + (9 - k)(9 - 2) + \Lambda + (9 - k)(9 - 8) = (9 - k)(8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 36(9 - k)$$

Somando essas quantidades para $k = 1, 2, K, 8$, obtemos o total de retângulos

$$36(9 - 1) + 36(9 - 2) + \Lambda + 36(9 - 8) = 36(8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 36 \cdot 36 = 1296$$

Questão 6 – Um triângulo isósceles retângulo ABC, cujos lados iguais, AB e AC, medem 1 cm de comprimento, é cortado de uma folha de papel que é branco de um lado e preto do outro. O papel é dobrado movendo o vértice B ao longo BC de tal forma que a área da região de cor preta e a área da região de cor branca sejam iguais. Depois de dobrado, a que distância está o vértice C do vértice B?

Justifique sua resposta

Solução:

Depois de dobrado o papel, temos um triângulo preto, que esconde uma parte do lado branco do papel igual ao dobro da área do triângulo. Temos também que a parte descoberta do lado branco do papel tem a forma de um trapézio. Para que as áreas das regiões preta e branca sejam iguais, devemos ter a área do triângulo preto igual a um terço da área do triângulo ABC inicial. Mas o triângulo preto é retângulo e isósceles, com um dos catetos formado no lado BC do triângulo inicial. Seja l a medida desse cateto, de forma que a área do triângulo preto é $l^2/2$. A área do triângulo ABC inicial é $1/2$, portanto devemos ter

$$\frac{l^2}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow l = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Seja x a distância entre os pontos B e C depois de dobrado o papel. O comprimento do lado BC do triângulo original é

$$2l - x = \sqrt{2}.$$

Logo

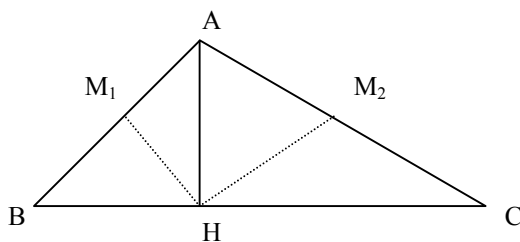
$$x = \sqrt{2} - 2 \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3}.$$

Resolução da prova Nível 3

Questão 1 – Seja ABC um triângulo qualquer e AH a altura em relação ao lado BC . Sejam M_1 e M_2 os pontos médios dos lados AB e AC respectivamente. Mostre que o ângulo $M_1\hat{H}M_2$ é igual ao ângulo $\hat{A}$.

Justifique sua resposta

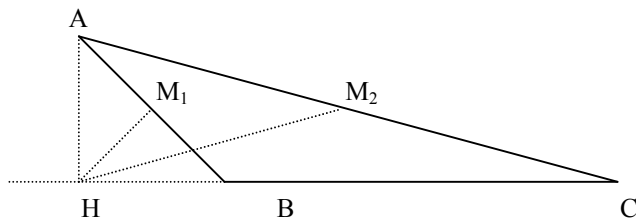
Solução:



O triângulo AHC é retângulo, logo inscrito na semi-circunferência de diâmetro AC . Daí $M_2C = M_2H$ (raio da circunferência). De maneira análoga para o triângulo AHB . Logo BM_1H e HM_2C são isósceles e $M_2\hat{H}C = \hat{C}$ e $M_1\hat{H}B = \hat{B}$, então $M_1\hat{H}B + M_1\hat{H}M_2 + M_2\hat{H}C = 180^\circ$, portanto

$$M_1\hat{H}M_2 = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = \hat{A}.$$

Obs: O mesmo acontece se consideramos o triângulo



Veja outra solução na página 40.

Questão 2 – A sequência de Fibonacci $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ é tal que $a_1 = a_2 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, para $n \geq 3$. Suponhamos que α seja um número real tal que $\alpha^2 = \alpha + 1$

- Verifique que $\alpha^3 = a_3\alpha + a_2$ e que $\alpha^4 = a_4\alpha + a_3$.
- Mostre que todas as potências inteiras positivas de α ($n \geq 2$) são representados por $\alpha^n = a_n\alpha + a_{n-1}$.

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Justifique sua resposta

Solução:

a) Observe que:

$$i) \quad \alpha^3 = \alpha^2 + \alpha = a_2\alpha^2 + a_1\alpha = a_2(\alpha + 1) + a_1\alpha = (a_1 + a_2)\alpha + a_2 = a_3\alpha + a_2.$$

$$ii) \quad \alpha^4 = \alpha^3 + \alpha^2 = a_3\alpha + a_2 + (\alpha + 1) = (a_3 + a_2)\alpha + (a_2 + a_1) = a_4\alpha + a_3.$$

b) Como $\alpha^2 = \alpha + 1$ temos $\alpha^2 = a_2\alpha + a_1$. Por a) $\alpha^3 = a_3\alpha + a_2$. Provaremos o item b) usando o 2º Princípio de Indução sobre n , $n \geq 3$. Suponhamos que para todo $3 \leq k < n$.

$$\alpha^k = a_k\alpha + a_{k-1}.$$

Também $\alpha^2 = \alpha + 1$ implica $\alpha^n = \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}$. Então:

$$\alpha^n = a_{n-1}\alpha + a_{n-2} + a_{n-2}\alpha + a_{n-3} = (a_{n-1} + a_{n-2})\alpha + (a_{n-2} + a_{n-3}) = a_n\alpha + a_{n-1}$$

Questão 3 – Quantos retângulos diferentes consistindo de um número inteiro de quadrados podem ser desenhados:

- a) em um tabuleiro (xadrez) 8 x 8?
- b) em um tabuleiro $n \times n$?

(considerando dois retângulos diferentes se eles possuírem dimensões diferentes, ou se ocuparem posições diferentes no tabuleiro).

Justifique sua resposta

Solução:

Primeiramente vejamos quantos retângulos com largura k quadrados e altura l quadrados podem ser formados em um tabuleiro. Todo retângulo desse tipo é obtido selecionando-se k colunas consecutivas e l linhas consecutivas.

- a) O grupo de k colunas consecutivas pode ser escolhido em $9 - k$ maneiras diferentes (a última coluna pode ser a k -ésima, $(k + 1)$ -ésima, ... ou a 8ª coluna). Analogamente, o grupo de l linhas pode ser escolhido em $9 - l$ modos diferentes. Logo, um retângulo de largura k e altura l pode ser escolhido em $(9 - k)(9 - l)$ maneiras distintas e esse é o total de retângulos desse tipo sobre o tabuleiro.

O número de retângulos de largura k sobre o tabuleiro é

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

$$(9-k)(9-1) + (9-k)(9-2) + \dots + (9-k)(9-8) = (9-k)(8+7+6+5+4+3+2+1) = 36(9-k).$$

Como k varia de 1 a 8, o número total de retângulos é

$$36(9-1) + 36(9-2) + \dots + 36(9-8) = 36 \cdot 36 = 1296.$$

- b) Como em a), concluímos que o número total de retângulos de comprimento k quadrados e altura l quadrados em um tabuleiro $n \times n$ é $(n+1-k)(n+1-k)$. O número total de retângulos de largura k quadrados é

$$(n+1-k)(1+2+\dots+n) = (n+1-k) \frac{n(n+1)}{2}.$$

Então, o número de retângulos no tabuleiro é

$$(1+2+\dots+n) \frac{n(n+1)}{2} = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

Questão 4 – Determinar, se existirem, todos os números naturais n tal que podemos decompor o conjunto $C = \{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ em dois subconjuntos A e B disjuntos, não vazios, de forma que o produto dos elementos de A seja ao produto dos elementos de B .

Justifique sua resposta

Solução:

Se p é um número primo que divide algum elemento de A , então p divide pelo menos dois elementos de C . Então, p só pode ser 2, 3 ou 5. O primo 5 pode dividir somente n e $n+5$.

Logo, $n+1, n+2, n+3, n+4$ podem ter como fatores somente 2 e 3. Como 3 não divide números consecutivos e também não divide ímpares consecutivos, concluímos que A e B não existem.

Questão 5 – Seja $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ um polinômio com coeficientes inteiros. Suponha que $P(x)$ tem três raízes distintas. Mostre que a equação $P(x) - 1 = 0$ não admite raiz inteira.

Justifique sua resposta

No enunciado da questão faltou a hipótese das raízes serem *inteiras*, o que torna falsa a afirmação de que $P(x) - 1$ não admite raiz inteira. Vários alunos notaram esta omissão, porém o aluno **Vitor Menezes Santana**, do Colégio WR, deu um contra-exemplo. Ele escreveu:

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Seja $P(x) = x^3 + 1$, $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$.

$P(x)$ tem três raízes distintas a saber,

$$x_1 = -1, x_2 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ e } x_3 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$$

Agora, $P(x) - 1 = 0$ implica $x^3 = 0$ que tem solução inteira.

Nossos parabéns a ele!

Vamos agora resolver o problema considerando que $P(x)$ tenha 3 raízes distintas e inteiras.

Solução:

Sejam r_1, r_2, r_3 três raízes inteiras, distintas de $P(x)$. Então podemos escrever $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$. Admitindo que $P(x) - 1 = 0$ tenha solução inteira x_0 , segue que $(x_0 - r_1)(x_0 - r_2)(x_0 - r_3) = 1$. Para que o produto de três números inteiros seja igual a 1 existem duas possibilidades:

i) Os três números são iguais a 1.

ii) Dois desses números são iguais a -1 e o terceiro é igual a 1.

Em qualquer uma dessas duas possibilidades pode-se concluir que $P(x)$ teria raízes iguais, o que contradiz a hipótese de que as três raízes são distintas.

Questão 6 –

- a) Estude o comportamento do resto da divisão por 7 de $2^x - x^2$ sendo x um número inteiro positivo menor ou igual a 10000.
- b) Quantos são os inteiros positivos $x \leq 10000$ tais que a diferença $2^x - x^2$ não é divisível por 7?

Justifique sua resposta

Solução:

a) Temos

$$1 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$2 \equiv 2 \pmod{7}$$

$$2^2 \equiv 4 \pmod{7}$$

$$2^3 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$2^4 \equiv 2 \pmod{7}$$

$$2^5 \equiv 4 \pmod{7}$$

Concluimos então que,

$$2^x = 2^{x+3} \pmod{7}, \text{ pois } 2^{x+3} - 2^x = 2^x(8 - 1) = 7 \cdot 2^x = 0 \pmod{7}.$$

Façamos também uma análise para os restos da divisão de x^2 por 7.

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

$$\begin{array}{ll}
 1 \equiv 1 \pmod{7} & 8^2 \equiv 1 \pmod{7} \\
 2^2 \equiv 4 \pmod{7} & 9^2 \equiv 4 \pmod{7} \\
 3^2 \equiv 2 \pmod{7} & 10^2 \equiv 2 \pmod{7} \\
 4^2 \equiv 2 \pmod{7} & 11^2 \equiv 2 \pmod{7} \\
 5^2 \equiv 4 \pmod{7} & 12^2 \equiv 4 \pmod{7} \\
 6^2 \equiv 1 \pmod{7} & 13^2 \equiv 1 \pmod{7} \\
 7^2 \equiv 0 \pmod{7} & 14^2 \equiv 0 \pmod{7}
 \end{array}$$

Temos que $(x+7)^2 - x^2 = 14x + 49 \equiv 0 \pmod{7}$.

Combinando os resultados acima, vemos que os restos de 2^x e x^2 na divisão por 7, se repetirão com período $3 \cdot 7 = 21$.

b) Para os valores de x de 1 a 27, construamos a tabela para 2^x e $x^2 \pmod{7}$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2^x	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2	4	1
x^2	1	4	2	2	4	1	0	1	4	2	2	4	1	0	1

16	17	18	19	20	21
2	4	1	2	4	1
4	2	2	4	1	0

Observamos na tabela acima 6 casos onde $2^x - x^2$ é divisível por 7, a saber

$$x = 2, 4, 5, 6, 10 \text{ e } 15$$

Pela periodicidade, os próximos 21 valores de x darão mais 6 casos e assim por diante. Como $10000 = 21 \cdot 476 + 4$ e o total de valores de x tais que $2^x - x^2$ é divisível por 7 é $476 \cdot 6 + 2 = 2858$, a resposta para o item b) é 7142.

Notícias

- **A IX Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás** será realizada no dia **07 de outubro de 2000**. As provas serão realizadas nas cidades de Goiânia, Catalão, Jataí, Rialma e Anápolis. Estamos verificando a possibilidade de aumentarmos o número de cidades em que realizaremos as provas.

Poderão se inscrever, por escola:

Nível 1 - 05 alunos de 5ª e 6ª séries do ensino fundamental;

Nível 2 - 05 alunos de 7ª e 8ª séries do ensino fundamental;

Nível 3 - 10 alunos do ensino médio.

Fica a critério da escola a seleção dos alunos participantes. A prova da 1ª fase da Olimpíada Brasileira de Matemática poderá ser utilizada para esta seleção.

As inscrições deverão ser enviadas para o Instituto de Matemática e Estatística - IME, em formulário próprio, até **31 de agosto de 2000**.

- **O IV Seminário da Olimpíada** será realizado no dia **07 de junho de 2000**. As inscrições deverão ser enviadas para o Instituto de Matemática e Estatística – IME, em formulário próprio, até **31 de maio de 2000**.

O seminário destina-se a professores interessados em discutir, propor e resolver problemas de matemática elementar típicos de Olimpíadas. Professor participe!!!

- **A XXII Olimpíada Brasileira de Matemática** será realizada nas seguintes datas:

a) 1ª fase (na escola) - **10 de junho de 2000**;

b) 2ª fase (na escola) - **02 de setembro de 2000**;

c) 3ª fase (no IME) - **21 e 22 de outubro de 2000**.

Para participar a escola deverá preencher o formulário que se encontra nas páginas finais desta revista e enviá-lo para o Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás ou para a Comissão Nacional de Olimpíada. Os endereços são:

Comissão Nacional de Olimpíada Estrada Dona Castorina, 110. Jardim Botânico CEP: 22 460 – 320 Rio de Janeiro – RJ	Universidade Federal de Goiás Instituto de Matemática e Estatística Coordenação de Olimpíada Campus Samambaia Caixa Postal 131 CEP: 74 001 – 970 Goiânia – Goiás
--	--

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

- Realizamos de 13 a 17 de março de 2000 a *I Semana Olímpica*. Este evento destinou-se principalmente aos alunos classificados na VIII Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás. Foram realizados vários minicursos e uma conferência. O IME pretende continuar realizando anualmente este evento.
- Vários eventos serão realizados no decorrer do ano 2000, tais como o *IV Encontro de Matemática e Estatística* (Goiânia), *Jornadas de Matemática e/ou Educação Matemática* nos campi de Rialma, Jataí, Catalão e Goiânia. Informações detalhadas serão divulgadas oportunamente.

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Artigos

Olimpíada de Matemática em Goiás

Gisele de Araújo Prateado Gusmão IME/UFG
Ronaldo Alves Garcia IME/UFG.

1. Introdução

A Olimpíada de Matemática é uma atividade mundial que teve início no século XIX na Hungria. Ressaltamos que neste século era freqüente as Academias de Ciências promoverem concursos de trabalhos científicos, como por exemplo o Problema da Estabilidade do Sistema Solar. Esta prática é ainda hoje cultivada na Europa. No Brasil são realizadas diversas Olimpíadas Regionais, a Olimpíada Brasileira e, a partir de 1995, a Olimpíada de Maio. Existem também as Olimpíadas Internacional, Iberoamericana e do Cone - Sul. Em todas o Brasil tem participado e conseguido bons resultados.

A Olimpíada consiste numa prova de conteúdo e raciocínio de matemática e é destinada a alunos do ensino fundamental e/ou médio. A Olimpíada Brasileira de Matemática é coordenada pela Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, sediada no Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, no Rio de Janeiro, e é realizada desde 1979; a regional de Goiás é realizada pelo Instituto de Matemática e Estatística (IME), desde 1992.

2. Objetivos

A importância da resolução de problemas é reconhecida em nível internacional como um aspecto central no processo de aprendizagem de matemática e tem sido uma das principais preocupações entre os professores. Problemas que exigem raciocínio e criatividade são muito estimulantes e envolventes. A Olimpíada tem por objetivo mostrar a importância da matemática no desenvolvimento das ciências através da resolução de problemas que procuram dar a quem os resolve uma atitude de investigação científica. Desta forma, mostra aos jovens a necessidade do raciocínio abstrato e do estudo para o domínio da ciência.

A Olimpíada em Goiás tem também o objetivo de ampliar o contato da Universidade com as escolas do ensino fundamental e médio, através de seus professores, principalmente durante a preparação de seus alunos, para o desenvolvimento de ações em conjunto visando a melhoria do ensino de matemática. O IME considera que temos alcançado estes objetivos, como veremos adiante, e pretendemos ampliar cada vez mais nossa atuação.

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

3. Histórico

A I Olimpíada regional, em 1992, foi realizada em Goiânia, para alunos do ensino médio de todo Estado. O número de alunos inscritos por escola não foi limitado. Tivemos aproximadamente 600 alunos inscritos sendo que a participação ficou restrita a apenas 155 (26,4% dos inscritos, ver quadro 1). Nos anos posteriores decidimos limitar o número de inscritos (10 alunos do ensino médio por escolas), que desta forma obrigou as escolas inscreverem apenas os alunos realmente interessados. Isto contribuiu para aumentar o envolvimento das escolas. Atualmente muitas escolas fazem uma seleção dos alunos interessados e algumas já fazem uma preparação para a Olimpíada antes desta seleção.

Na IV Olimpíada regional começamos a realizar provas também para alunos de 7ª e 8ª séries do ensino fundamental e, por sugestão, dos professores começamos também a enviar para as escolas listas de problemas para auxiliar na preparação dos alunos. Também por sugestão dos professores começamos a publicar, a partir da V Olimpíada, um caderno com a resolução comentada das provas que é enviado para a residência dos professores cadastrados. Para as escolas cadastradas, além da resolução comentada, enviamos o caderno Coletâneas de Problemas que são utilizados para a preparação de seus alunos e como fonte de consulta para os professores interessados em enriquecer suas aulas com problemas fora do livro texto.

Estes cadernos deram origem a *Revista da Olimpíada*, que neste primeiro número contém a resolução comentada da VIII Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás, uma coletânea de problemas e também artigos de matemática elementar e algumas notícias sobre as Olimpíadas e atividades do IME.

Na VII Olimpíada começamos a realizar provas para alunos de 5ª e 6ª séries do ensino fundamental. Assim, a partir desta olimpíada temos provas do:

- ❖ Nível 1 para alunos de 5ª e 6ª séries, neste nível cada escola pode inscrever 05 alunos;
- ❖ Nível 2 para alunos de 7ª e 8ª séries, neste nível cada escola pode inscrever 05 alunos;
- ❖ Nível 3 para alunos do ensino médio, neste nível cada escola pode inscrever 10 alunos.

O Quadro 1 mostra o aumento da participação de alunos durante estes anos, com exceção de 1992 para 1993, chegando a ter um aumento de 190% da VI para a VII Olimpíada no número de inscritos. No número de escolas participantes houve um aumento de 100% da VI para a VII Olimpíada que contou com a participação de 146 escolas de todo Estado (quadro 2). Atualmente realizamos as provas nos campi da UFG em Goiânia, Catalão, Rialma, Jataí e em Anápolis na Universidade Estadual de Goiás. O quadro 3

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

mostra o número de inscritos e participantes, na VII e VIII Olimpíadas, em cada um destes locais.

Temos trabalhado no sentido de incentivar a participação dos alunos do interior do Estado, principalmente os que moram próximos aos campi da UFG. Em 1998 fizemos uma premiação local em Catalão, nos níveis 1 e 2, e em Rialma no nível 1, aos alunos que tiveram um bom desempenho nestas regiões.

O Departamento de Matemática do Campus Avançado de Jataí com apoio da Secretaria Municipal de Educação promoveu em 1998 a I Olimpíada de Matemática da Cidade de Jataí.

À medida em que esses alunos participam de atividades nos campi, como a Olimpíada, a Universidade se integra mais à comunidade. Os comentários que os alunos fazem nas Olimpíadas mostram a importância deste evento.

O desafio que temos pela frente é aumentar a participação de alunos da rede pública de ensino, principalmente dos municípios, que consideramos ainda muito baixa.

Quadro 1 – As Olimpíadas em Goiás

Olimpíada	Números de Inscritos			Número de Participantes			Total de Inscritos	Part. %
	Ensino Fundamental		Ensino Médio	Ensino Fundamental		Ensino Médio		
	Nível 1 5ª e 6ª	Nível 2 7ª e 8ª	Nível 3 1ª, 2ª e 3ª	Nível 1 5ª e 6ª	Nível 2 7ª e 8ª	Nível 3 1ª, 2ª e 3ª		
I - 1992	---	---	588 *	---	---	155 *	588	26,4%
II - 1993	---	---	106	---	---	63	106	59,4%
III - 1994	---	---	188	---	---	115	188	61,2%
IV - 1995 **	---	125	243	---	90	171	368	70,9%
V - 1996	---	246	267	---	152	183	513	65,3%
VI - 1997	---	302	386	---	211	259	688	68,3%
VII - 1998 ***	523	568	892	374	393	575	1983	67,7%
VIII - 1999	536	557	909	355	346	474	2002	58,7%

* Sem limite de inscrições por escola. ** Início da participação de alunos de 7ª e 8ª séries do ensino fundamental – Nível2.

*** Início da participação de alunos de 5ª e 6ª séries do ensino fundamental – Nível 1.

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Quadro 2 – Escolas na VII e VIII Olimpíadas

Escolas Participantes VII Olimpíada						
Pública Municipal	Pública Estadual	Pública Federal	Conveniada	Particular	Total	
					Goiânia	Interior
					84	62
10	57	2	8	69	146	
Escolas Participantes VIII Olimpíada						
Pública Municipal	Pública Estadual	Pública Federal	Conveniada	Particular	Total	
					Goiânia	Interior
					75	71
9	57	3	5	72	146	

Quadro 3 – Inscritos e Participantes nas Olimpíadas por Campi

VII Olimpíada									
Campi	Números de Inscritos				Número de Participantes				
	Ens. Fundamental		Ens. Médio		Ens. Fundamental		Ens. Médio		Part.
	Nível 1 5ª e 6ª	Nível 2 7ª e 8ª	Nível 3 1ª, 2ª e 3ª	Total	Nível 1 5ª e 6ª	Nível 2 7ª e 8ª	Nível 3 1ª, 2ª e 3ª	Total	
	Insc.	Insc.	Insc.	Insc.	Insc.	Insc.	Insc.	Insc.	
Goiânia	435	476	760	1671	319	336	509	1164	69,7%
Catalão	27	22	42	91	20	16	22	58	63,7%
Rialma	15	21	45	81	14	16	25	55	67,9%
Jataí	46	49	45	140	21	25	19	65	46,4%
Total	523	568	892	1983	374	393	575	1342	67,7%

VIII Olimpíada									
Campi	Números de Inscritos				Número de Participantes				
	Ens. Fundamental		Ens. Médio		Ens. Fundamental		Ens. Médio		Part.
	Nível 1 5ª e 6ª	Nível 2 7ª e 8ª	Nível 3 1ª, 2ª e 3ª	Total	Nível 1 5ª e 6ª	Nível 2 7ª e 8ª	Nível 3 1ª, 2ª e 3ª	Total	
	Insc.	Insc.	Insc.	Insc.	Insc.	Insc.	Insc.	Insc.	
Goiânia	389	417	684	1490	319	336	509	1164	78,1%
Catalão	34	37	75	146	27	23	24	74	50,7%
Rialma	35	35	68	138	17	18	29	64	46,4%
Jataí	30	26	35	91	19	15	19	53	58,2%
Anápolis	48	42	47	137	24	21	24	69	50,4%
Total	536	557	909	2002	406	413	605	1424	71,1%

3.1 Atividades no dia da prova

Devido ao fato de muitos professores acompanharem seus alunos no dia da realização da Olimpíada, a partir da III Olimpíada começamos a realizar atividades com estes professores. Em 1999 esta participação foi de, aproximadamente, 150 professores.

As atividades foram:

- ❖ **III Olimpíada (1994):** Mesa redonda – “O Ensino de Matemática em Goiás” com a participação de vários professores do IME e das redes Estadual, Municipal e Particular de Ensino.
- ❖ **IV Olimpíada (1995):** Palestras – “A Evolução dos Conceitos de Área e Volume” com o prof. Ronaldo Alves Garcia (UFG) e “A Licenciatura de

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Matemática na UFG e sua Vinculação com as Escolas do Ensino Fundamental e Médio” com o prof. Mauro Urbano Rogério (UFG).

❖ **V Olimpíada (1996):** Palestra – “Poliedros” com o prof. Ângelo Barone (USP).

❖ **VI Olimpíada (1997):** Palestra – “Problemas Olímpicos” com o prof. Carlos Gustavo de A. Moreira (IMPA/RJ).

Após a realização das provas da VI Olimpíada, em Goiânia, por volta das 12:00h, o prof. Carlos Gustavo fez uma discussão das questões com os alunos. Muitos ficaram no campus esperando este momento. O Professor foi ganhador de várias Olimpíadas regionais e internacionais e hoje é pesquisador de renome internacional e um dos coordenadores da Olimpíada Brasileira de Matemática.

❖ **VII Olimpíada (1998):** Palestras – “ Problemas de Combinatória” com o prof. Nicolau Saldanha (PUC/RJ) e “ O ensino da Matemática” com o prof. Mauro Urbano Rogério (UFG)

❖ **VIII Olimpíada (1999):** Palestra – “Combinatória não é apenas Contagem” com o Prof. Paulo César Pinto Carvalho (IMPA – RJ)

3.2 Classificados

São classificados os alunos que obtiverem os melhores aproveitamentos em cada nível. Estes alunos recebem como prêmios livros doados pela Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, placas de Honra ao Mérito e os 3 primeiros classificados recebem premiações em dinheiro. A partir da VII Olimpíada os alunos passaram a receber medalhas no lugar de placas de Honra ao Mérito e um certificado com sua classificação. Na VIII Olimpíada enviamos para todos os alunos participantes um certificado de participação.

Os classificados nas Olimpíadas foram:

I Olimpíada (1992)

Classificação	Nome	Série	Escola
1º Lugar	Jamil Calixto Said	2ª	Pré-Médico
2º Lugar	Fernando M. Araújo	2ª	Pré-Médico
3º Lugar	Juliano A. de Lemos	2ª	Pré-Médico
Menções Honrosas	Cristiano Borges Moraes	3ª	Pré-Médico
	Luciano Melo Duarte	3ª	Pré-Médico
	Alan Carneiro Viana	1ª	ETFG
	Karenina Fernandes Bittes	3ª	Objetivo
	Tarcísio Nunes Carvalho	1ª	Pré-Médico
	Ronney de Carvalho	3ª	Objetivo
	André Luiz S. Portugal	3ª	Objetivo
	Erika Verediana Ferreira	3ª	S. Tomaz R. Verde

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

	José de Barros S. Neto	1ª	ETFG
	Luciano da Silva Pacheco	2ª	Pré-Médico

II Olimpíada (1993)

Classificação	Nome	Série	Escola
1º Lugar	Romis R. de Faissol Attux	2ª	Colégio Pré-Médico
	Fernando César Oliveira Costa	2ª	Colégio Pré-Médico
2º Lugar	Alexandre Barra de Moraes	2ª	Colégio Pré-Médico
3º Lugar	Tarcísio Nunes Carvalho	3ª	Colégio Pré-Médico
Menções Honrosas			
4º Lugar	Bruno Fabrício P. da Rocha	3ª	Colégio Anglo
	Rivael Aguiar Pereira	1ª	ETFG
	Gláucio Madeira de Souza	3ª	Colégio Pré-Médico
5º Lugar	Cleber Rodrigues de Souza	1ª	C. Couto Magalhães
	Celso de Souza Júnior	3ª	ETFG
6º lugar	Jovelino Moreira de Moura	2ª	Colégio Einstein

III Olimpíada (1994)

Classificação	Nome	Série	Escola
1º Lugar	Romis R. de Faissol Attux	2ª	Colégio Pré-Médico
2º Lugar	Márcio Venício Pilar Alcântara	2ª	ETFG
3º Lugar	Ardiley Torres Avelar	2ª	ETFG
	Hugo Soltz	3ª	Colégio Pré-Médico
	André Luiz Moraes Silva	3ª	ETFG/Jataí
	Glenio Fernandes Moraes	1ª	ETFG/Jataí
Menções Honrosas			
4º Lugar	Luiz Reginaldo A. F. Curado	3ª	Colégio Anglo
5º lugar	Rodrigo de M. Sartini	1ª	ETFG
6º Lugar	Ricardo Ander de Oliveira	3ª	Colégio Pré-Médico
7º Lugar	Ana Beatriz Sabbag Cunha	2ª	Colégio Auxilium

IV Olimpíada (1995)

Modalidade I (Ensino Médio)

Classificação	Nome	Série	Escola
1º Lugar	Gustavo E. Neses	2ª	Colégio Pré-Médico

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

2º Lugar	Márcio V. P. Alcântara	2ª	ETFG
3º Lugar	Heber S. C. Ribeiro	3ª	Colégio Agostiniano
4º Lugar	Diego R. de Moraes	2ª	Colégio WR
5º Lugar	Ardiley Torres Avelar	3ª	ETFG
6º Lugar	Rodrigo de Magalhães Sartim	3ª	Colégio Agostiniano
7º Lugar	Tarik Pereira de Souza	3ª	Colégio Pré-Médico
8º Lugar	Jeann R. do Carmo Lopes	3ª	Colégio WR
9º Lugar	Juliana Janine Rodrigues	2ª	Col. Santo Agostinho
10º Lugar	Monika Lourenço D. Rodrigues	2ª	Colégio Pré-Médico

Modalidade II (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental)

Classificação	Nome	Série	Escola
1º Lugar	Paulo Vinícius A. Ximenes	8ª	Colégio Porto Seguro
2º Lugar	Carlos G. V. de Moraes	8ª	Colégio Marista
3º Lugar	Danilo B. Dalul	8ª	Colégio Marista
4º Lugar	Humberto Granner Moreira	8ª	Col. Agostiniano
5º Lugar	Adalberto César Caiado	8ª	Col. Agostiniano
6º Lugar	Adriana Zanatta Pacheco	8ª	Colégio Santa Clara
7º Lugar	Alexandre Rezende Ferreira	7ª	Col. Santo Agostinho
	Allan Valle Toledo da Silveira	8ª	Colégio São Nicolau
8º Lugar	Diego Sander Freire	8ª	C. Anglo (Campinas)
9º Lugar	Cecy Correia Florentino	8ª	Colégio Marista

V Olimpíada (1996)

Modalidade I (Ensino Médio)

Classificação	Nome	Escola
1º Lugar	Hugo Leonardo Paiva Rodrigues	Colégio WR
2º Lugar	Rafael Leal Martins	Colégio Objetivo
3º Lugar	Márcio Venício P. Alcântara	E.T.F. / GO
Menções Honrosas	Adriano Henrique de O. Aragão	Colégio Agostiniano
	Adriano José de Azevedo	Colégio Pré-Médico
	André Bragotto Ragazzo	Colégio WR
	Diêgo Rodrigues de Moraes	Colégio WR
	Karla Cristina Naves de Carvalho	Colégio WR
	Renata D. de Moraes e Macêdo	Colégio WR
	Sérgio Paulo Carneiro Júnior	Colégio Objetivo

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Modalidade II (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental)

Classificação	Nome	Escola
1º Lugar	Adriana Pereira Franco	Colégio Agostiniano
2º Lugar	Renato Oliveira e Castro	Colégio Delta
3º Lugar	Zsanette Balla	Colégio Marista
Menções Honrosas	Ana Karolina Mariano Ferreira	Colégio Pré-Médico
	Ângelo Stacciarini Seraphin	Colégio Delta
	Eduardo R. de Lelis Oliveira	Colégio Anglo
	Márcia Cristina M. de Borba	Colégio Marista
	Marina Lopes Rossi	Colégio Anglo/Catalão
	Nadim Seguti Nucada	Colégio Delta
	Saulo Henrique A. Rios Leite	Colégio Agostiniano

VI Olimpíada (1997)

Modalidade I (Ensino Médio)

Classificação	Nome	Série	Escola
1º Lugar	Fábio Antunes da Silva	3ª	Colégio WR
2º Lugar	Carlos Gustavo V. de Moraes	2ª	Col Pré – Médico
3º Lugar	Giancarlo Rezende Bessa	2ª	Galileu Anápolis
Menções Honrosa	Abdandryk Cunha de Souza	2ª	Col. Disciplina
	Auro Giorgi Ferreira Nobre	3ª	Col. Dinâmico
	Fernando V. Pericole de Souza	2ª	Galileu Anápolis
	Luciano M. Camilo e Silva	3ª	Colégio WR
	Marcelo Braz Vieira	3ª	Col. Dinâmico
	Marcelo de Carvalho Leite	3ª	Col. Acadêmico
	Nadim Seguti Nucada	1ª	Colégio Delta

Modalidade II (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental)

Classificação	Nome	Série	Escola
1º Lugar	Humberto Silva Naves	7ª	Colégio Marista
2º Lugar	Fabício Cardoso Leão	8ª	Delta
3º Lugar	Daniel Ribeiro da Silva	8ª	C. São Cristóvão
Menções Honrosas	Wagner Gudson Marques Jr	7ª	Colégio IPE
	Liziane Paula P. Torres	8ª	Colégio Marista
	Rômulo Augusto Fuzo	8ª	Colégio IPE
	Marcelo Rodrigues S. Ribeiro	8ª	Colégio Phoenix
	Jaciara Izabel C. Morgado	8ª	Colégio Galáxia
	Otávio Carneiro Neto	8ª	Colégio Delta
	Léo Carrer Nogueira	8ª	Colégio Ávila

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

VII Olimpíada (1998)

Nível 1 (5ª e 6ª séries de Ensino Fundamental)

Classificação	Nome	Série	Escola
1º Lugar	Thiago Carneiro Elias	6ª	IPÊ
2º Lugar	Rogério Luiz de A. Borges	6ª	Delta /Bueno
3º Lugar	Cibele Ferreira de Souza	6ª	E. Nasc. Araguaia
Menções Honrosas	Jaqueline M.do Nascimento	5ª	Marista
	Thalles Abrão Doeher	6ª	Marista
	Jorge Peixoto de Moraes	6ª	Disciplina
	Daniel Costa Garcia	6ª	IPÊ
	Karine S. Melazo	6ª	Solar
	Rafaela Batista de Oliveira	6ª	IPÊ
	Elisa Manfrin de Araújo	6ª	Agostiniano

Nível 2 (7ª e 8ª séries de Ensino Fundamental)

Classificação	Nome	Série	Escola
1º Lugar	Humberto Silva Naves	8ª	Marista
2º Lugar	Carlos Steim Naves de Brito	8ª	Marista
3º Lugar	Rafael Oliveira Ximenes	8ª	IPÊ
Menções Honrosas	Fernando Portilho Ferro	8ª	Ext. São José
	Vítor Mendonça e Silva	8ª	Marista
	Leonardo Terêncio B. Xavier	8ª	Mega
	Ana Lúcia dos S. Borba	8ª	Ext. São José
	Douglas Junio Ferreira	8ª	Delta
	Climbiê Ferreira Hall	7ª	Phoenix
	Marcelo Pereira Barros	8ª	C E São Cristóvão

Nível 3 (Ensino Médio)

Classificação	Nome	Série	Escola
1º Lugar	Luis Eduardo e Silva Naves	2ª	WR
2º Lugar	Juliana Beatriz Gebrim	3ª	Dinâmico
3º Lugar	Thiago Artiaga Consort	3ª	Agostiniano
Menções Honrosas	Paulo Vinícius Ximenes	3ª	Dinâmico
	Vítor Menezes Santana	2ª	WR

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

	Humberto Ganner Moreira	3 ^a	WR
	Fernando Vieira P. de Souza	3 ^a	WR
	Adriano H. de O Aragão	3 ^a	Agostiniano
	Jair Lage de Siqueira Neto	3 ^a	WR
	Fernando Prado Rocha	1 ^a	Mega

Premiação Local – Catalão

Nível 1 (5^a e 6^a séries do Ensino Fundamental)

Classificação	Nome	Série	Escola
Menções Honrosas	Amanda Barbosa Río	6 ^a	Colégio Anglo
	Marcelo gomes Marçal V. Vaz	6 ^a	Colégio Anglo
	Rodrigo Scalia Fernandes	5 ^a	Colégio Anglo

Nível 2 (6^a e 7^a séries do Ensino Fundamental)

Classificação	Nome	Série	Escola
Menções Honrosas	Ana Cláudia Mendes	8 ^a	Colégio Objetivo
	Andréia Alvares Jácomo	7 ^a	Colégio Objetivo

Premiação Local – Rialma

Nível 1

Classificação	Nome	Série	Escola
Menção Honrosa	Rafael Andrade de Oliveira	5 ^a	Colégio Solar

Os classificados na VIII Olimpíada encontram-se na página 30.

5. Divulgação

Fazemos a divulgação da Olimpíada nos meses de março e agosto, quando enviamos para, aproximadamente, 580 escolas do Estado, cartaz, carta para o diretor com todas as informações sobre a Olimpíada, as fichas de inscrição dos alunos e, apenas na 1^a divulgação, a ficha de inscrição dos professores para o Seminário da Olimpíada e publicações para preparação dos alunos. Fazemos uma divulgação também para, aproximadamente, 410 professores cadastrados no IME.

As publicações foram:

- ❖ Em 1996 – Resolução Comentada da V Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás e a Lista Preparatória, que foram enviadas às escolas em 1997.

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

- ❖ Em 1997 – Resolução Comentada da VI Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás e a Coletânea de Problemas, que foram enviadas às escolas em 1998.
- ❖ Em 1998 – Resolução Comentada da VII Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás e a Coletânea de Problemas, que foram enviadas às escolas em 1999.
- ❖ Em 1999 – Revista da Olimpíada nº 1, enviadas às escolas em 2000.

5.1 Seminário / Semana Olímpica

A partir de 1996 começamos a realizar o Seminário da Olimpíada, com a intenção de aumentar ainda mais o contato entre os professores do IME e os do ensino fundamental e médio das redes públicas e particular interessados em discutir assuntos ligados às Olimpíadas.

De 13 a 17 de Março de 2000 realizamos a I Semana Olímpica. Este evento destinou-se principalmente aos alunos classificados na VIII Olimpíada.

Foram realizados para os alunos dos níveis 1 e 2 minicursos de Teoria dos Números, Geometria e Combinatória e para os alunos do nível 3, Análise, Álgebra e Geometria. Para todos os alunos foi realizado uma conferência “A Geometria através dos tempos” com o prof. Genésio Lima dos Reis.

5.2 Logomarca

Em 1996 realizamos um concurso para a criação da logomarca da Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás. O concurso foi aberto a todos os alunos do ensino fundamental e médio, Categoria I, e alunos do ensino superior, Categoria II. O aluno Marcelo Batista Lima do Colégio São Francisco de Assis de Anápolis ganhou na Categoria I e o aluno Anderson Viana Macêdo do curso de Artes Visuais do Instituto de Artes da UFG foi o ganhador da Categoria II. A comissão organizadora do concurso, composta pelas professoras Cecília Fittipaldi Vessani (Instituto de Artes – UFG), Rosane Costa Badan Vessani (Instituto de Artes – UFG) e Gisele de Araújo Prateado Gusmão (Instituto de Matemática e Estatística – UFG), escolheu o símbolo abaixo, ganhador da Categoria II, como a logomarca da Olimpíada, que é usado até hoje. Segundo o vencedor, “...a letra mais usada em matemática e que melhor a representa é o x , então o símbolo são 5 letras x dispostas como os círculos olímpicos e da mesma cor destes”.



Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

5.3 Jornadas de Educação Matemática

O Instituto de Matemática e Estatística realiza, desde 1994, a Jornada de Educação Matemática, na qual são apresentadas comunicações, painéis e oficinas sobre as Olimpíadas.

A atividade proposta na oficina é a resolução de problemas olímpicos, tanto da Olimpíada regional quanto da brasileira. Na oficina de 1998, tivemos a participação de 42 professores trabalhando em grupo, durante 4 horas, onde discutimos vários problemas e a melhor maneira de incentivar seus alunos a pensar sobre eles.

5.4 Internet

No site <http://www.mat.ufg.br/eventos/Olimpiadas> colocamos a disposição todo o material didático produzido e também informações atualizadas sobre a Olimpíada.

6. Sobre as provas

Com relação às provas podemos relatar que o aproveitamento tem sido dentro do esperado, com um sensível aumento de aproveitamento dos alunos que estão sendo preparados. Na 1ª participação dos alunos de 5ª e 6ª séries, alguns professores tinham uma expectativa apreensiva com relação às provas, mas não fundamentada, pois o aproveitamento dos alunos neste nível foi muito bom.

Muitas vezes ficamos surpreendidos com a elegância e clareza com que são resolvidas algumas questões da prova. Quase sempre a rotulação dos problemas entre fáceis e difíceis não são adequadas, os alunos das séries iniciais usam mais o raciocínio na tentativa de solucionar os problemas e demonstram mais naturalidade em abordar um problema em que não tenham visto o conteúdo.

A Olimpíada de Goiás não tem a pretensão de procurar “gênios”, ao contrário o objetivo é incentivar todos os alunos a participarem, inicialmente, na Escola na etapa de preparação e, posteriormente, na Regional. As provas são acessíveis, em princípio, a todos os alunos mas também são seletivas, sendo 2 questões “fáceis”, 2 “médias” e 2 “difíceis”.

As provas não são separadas por séries e seus conteúdos não seguem de forma estrita os vistos na escola, isto se justifica porque não é objetivo da Olimpíada avaliar o ensino e sim a criatividade e raciocínio do aluno em problemas não usuais nos livros texto. Outra razão é levar o aluno a refletir sobre o processo de aprendizagem de matemática.

9. Financiamento

Em todas as Olimpíadas realizadas, contamos com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática com a vinda de conferencistas e doação de livros. A

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

partir de 1998 temos um apoio financeiro dentro do Projeto da Olimpíada Brasileira de Matemática.

As Pró – Reitorias de Extensão e Cultura (PROEC) e de Graduação (PROGRAD) sempre apoiaram financeiramente a realização das Olimpíadas.

Na I Olimpíada tivemos o apoio do BEG e nas II e III Olimpíadas tivemos o apoio da FUNAPE.

Em algumas Olimpíadas contamos com o apoio da Secretaria Estadual de Educação com material de consumo.

Em 1999 contamos com o apoio também de algumas escolas com doação de livros e dinheiro.

10. Conclusão

A evolução da Olimpíada, conforme demonstrada, é fruto de um trabalho contínuo e consistente que tem tido a participação crescente de alunos e professores do Ensino Fundamental e Médio. Através da Olimpíada, temos divulgado a matemática e também a ciência básica em todo o Estado. O reflexo desta ação, contudo, não é imediato. Os resultados alcançados até o momento são animadores.

A cada ano o projeto da Olimpíada é atualizado e cadastrado junto a PROEC/UFG.

É meta do Instituto continuar promovendo a Olimpíada, buscando os recursos financeiros necessários a sua realização, mantendo como objetivos principais: a melhoria do Ensino, a integração com a comunidade e a valorização do saber crítico e científico dos alunos do ensino fundamental e médio. Destacamos também que a Olimpíada de Goiás é mais um meio da Universidade estar atuante junto a sociedade, promovendo o estudo e despertando jovens talentos. Esperamos conseguir a curto prazo um espaço na imprensa local para uma divulgação regular da Olimpíada.

Na medida em que o evento se consolida como uma atividade permanente do IME/UFG outras ações tornam-se imprescindíveis e são reivindicadas pelos professores e alunos participantes. Por exemplo, é necessário a melhoria da infra-estrutura física para a realização da Olimpíada e uma equipe de coordenação e execução com melhor estrutura física, administrativa e acadêmica.

11. Referências Bibliográficas

1. --- Pasta da Olimpíada de Matemática , arquivos. Secretaria do Instituto de Matemática e Estatística, UFG.
2. Gusmão, Gisele de A. Prateado et alli. Resolução Comentada da V, VI, VII, VII Olimpíada de Matemática. Goiânia, Goiás, 1996.
3. Revista do Professor de Matemática – Sociedade Brasileira de Matemática – nº 02, 05, 06, 07, 08, 16 e 18.

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

4. Zetetiké, Ano 3 – Número 04 – Novembro de 1995.

Gisele de Araújo Prateado Gusmão
Ronaldo Alves Garcia
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
Goiânia, GO, Brasil
gisele@mat.ufg.br
ragarcia@mat.ufg.br

Seqüências

Gisele de Araújo Prateado Gusmão - IME/UFG

Introdução

Seqüência numérica não é um tópico visto no ensino fundamental apesar de poder ser tratado de uma maneira fácil e interessante para alunos deste nível. Basta o conhecimento de números para que este tópico seja visto. Existem muitas seqüências interessantes que podem ser tratadas na 5ª e 6ª séries, tais como a seqüência de números triangulares, de números quadrangulares, a seqüência de Fibonacci, e tantas outras, inclusive criadas pelos alunos.

A partir do entendimento do conceito de seqüências a notação pode ser dada de forma natural, e como uma maneira mais simples de se representar os termos da seqüência. Se o professor preferir poderá deixar a notação para séries do ensino fundamental mais adiantadas.

No livro *O Diabo dos Números* [5] são mostradas várias seqüências numéricas de uma maneira agradável que podem ser usadas em sala de aula.

Neste artigo pretendemos mostrar algumas seqüências e problemas que podem ser tratados no ensino fundamental de maneira a ser uma alternativa no estudo de números. No final deixamos alguns exercícios propostos.

Seqüência Numérica

Uma seqüência numérica é, como o nome diz, uma lista ordenada de números. Para entendermos esta definição o melhor é apresentar exemplos de seqüências.

Exemplos:

- a) 1, 2, 3, 4, 5,;
- b) 2, 4, 6, 8, 10;
- c) 1, 0, 1, 0, 1, 0, ...;
- d) 1, 3, 5, 7, ..., 21.

A primeira seqüência tem como termos os números naturais, a segunda os números naturais pares de 2 a 10. Os pontinhos no final da primeira seqüência significam que ela continua sempre. Quando isto acontece dizemos que a seqüência possui infinitos termos não necessariamente distintos, como por exemplo a seqüência do item (c). Já a segunda seqüência tem 5 termos e dizemos que ela é finita. E a quarta seqüência, quantos termos possui? Para responder esta pergunta precisamos contar seus termos:

- primeiro termo é 1;
- segundo termo é 3;
- terceiro termo é 5;
- quarto termo é 7; e assim em diante.

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Quando contamos, associamos um número natural com cada termo da sequência. Na tabela abaixo a primeira linha aparece a ordem do termo e na segunda linha os termos:

Ordem	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Termo	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21

Assim o número 21 é o 11º termo da sequência, logo ela possui 11 termos.

Uma maneira de representarmos os termos de uma sequência mostra a ordem do termo como índice. Esta representação para a sequência acima é:

Ordem	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Representação	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
Termo	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21

Podemos representar as outras sequências dadas por:

a) $a_1 = 1$; $a_2 = 2$; $a_3 = 3$; $a_4 = 4$; $a_5 = 5$; $a_6 = 6$;

b) $a_1 = 2$; $a_2 = 4$; $a_3 = 6$; $a_4 = 8$; $a_5 = 10$.

Termo Geral

Na sequência de números inteiros dada no item (d) observamos que seus termos possuem a seguinte lei de formação:

$a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$	$a_4 = 2 \cdot 4 - 1 = 7$	$a_7 = 2 \cdot 7 - 1 = 13$	$a_{10} = 2 \cdot 10 - 1 = 19$
$a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$	$a_5 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$	$a_8 = 2 \cdot 8 - 1 = 15$	$a_{11} = 2 \cdot 11 - 1 = 21$
$a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$	$a_6 = 2 \cdot 6 - 1 = 11$	$a_9 = 2 \cdot 9 - 1 = 17$	

Observe que o índice e o número que aparecem na equação multiplicado por 2 são os mesmos. Assim a equação que generaliza estas equações é

$$a_n = 2 \cdot n - 1 \text{ com } n \text{ variando de } 1 \text{ a } 11.$$

No exemplo do item (a) o termo geral é $a_n = n$ onde n é um número natural. No exemplo do item (b) o termo geral é $a_n = 2n$ onde n é um número natural variando de 1 a 5. A sequência do item (c) pode ser representada por $a_n = 1$ se n for ímpar e $a_n = 0$ se n for par.

Equação de Recorrência

Na sequência de números ímpares dada, observamos que a diferença entre termos consecutivos é sempre igual a 2. Então

$a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3$	$a_6 = a_5 + 2 = 9 + 2 = 11$	$a_{10} = a_9 + 2 = 17 + 2 = 19$
$a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5$	$a_7 = a_6 + 2 = 11 + 2 = 13$	$a_{11} = a_{10} + 2 = 19 + 2 = 21$
$a_4 = a_3 + 2 = 5 + 2 = 7$	$a_8 = a_7 + 2 = 13 + 2 = 15$	
$a_5 = a_4 + 2 = 7 + 2 = 9$	$a_9 = a_8 + 2 = 15 + 2 = 17$	

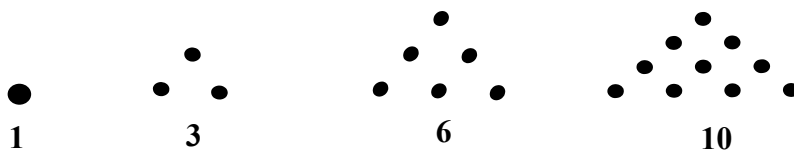
Vemos que a equação que generaliza as equações acima é

$$a_n = a_{n-1} + 2 \text{ para } n \text{ variando de } 2 \text{ a } 11.$$

A equação acima é chamada **equação de recorrência**, pois para obtermos o termo de ordem n recorremos ao termo de ordem $n - 1$.

Números Triangulares

Observe a figura abaixo.



Veja que, com exceção do primeiro, os pontos na figura sugerem a forma de triângulos. O primeiro “*triângulo*” tem apenas um ponto. O segundo possui 2 pontos a mais que o primeiro, logo possui

$$1 + 2 = 3 \text{ pontos.}$$

O terceiro possui 3 pontos a mais que o segundo, logo possui

$$3 + 3 = 6 \text{ pontos.}$$

O quarto triângulo terá 4 pontos a mais que o terceiro, logo possui

$$6 + 4 = 10 \text{ pontos.}$$

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Continuando o quinto triângulo possui 5 pontos a mais que o quarto, logo possui

$$10 + 5 = 15 \text{ pontos.}$$

Estes números são chamados de triangulares por formarem triângulos. A sequência de números triangulares é

$$1, 3, 6, 10, 15, \dots$$

Usando a notação de sequência temos

$$a_1 = 1; a_2 = 3; a_3 = 6; a_4 = 10; a_5 = 15, \dots$$

Os termos desta sequência foram obtidos de forma recorrente, isto é, para obter um termo adicionamos o número, que representa a sua ordem, ao seu antecedente. Assim

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 2 = 1 + 2 = 3; \\ a_3 &= a_2 + 3 = 3 + 3 = 6; \\ a_4 &= a_3 + 4 = 6 + 4 = 10; \\ a_5 &= a_4 + 5 = 10 + 5 = 15. \end{aligned}$$

Logo a equação de recorrência dos números triangulares é

$$a_n = a_{n-1} + n, \text{ onde } n \text{ é um número natural.}$$

Sequência de Fibonacci

Leonardo de Pisa, mais conhecido mais pelo seu apelido Fibonacci, abreviatura de filius de Bonacci, ou seja, filho de Bonacci, foi um famoso matemático do século XIII. Seu livro “Liber abacci” (Livro de ábaco) contém os conhecimentos algébricos e aritméticos de seu tempo e vários problemas [2]. Um deles é “Quantos casais de coelhos nascem, transcorridos um ano, de um casal inicial?”.

Uma formulação matemática deste problema aparece no livro *O Diabo dos Números* [5], e a resposta é 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., onde cada termo, a partir do segundo, é obtido somando os dois termos anteriores. A sequência de Fibonacci é um caso particular desta, onde os dois primeiros termos são iguais a 1, assim

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Vemos que $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ e a partir daí o próximo termo é obtido somando – se os dois anteriores, isto é,

$$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2;$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3;$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5 \text{ e assim em diante.}$$

Logo, a fórmula de recorrência desta sequência é

$$a_1 = 1; a_2 = 1 \text{ e } a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Os termos da sequência de Fibonacci são encontrados na distribuição dos galhos de uma árvore [5], no arranjo de folhas (filotaxia) e ocasionalmente em genética de populações [7].

A soma dos quadrados dos termos da sequência de Fibonacci é dada por

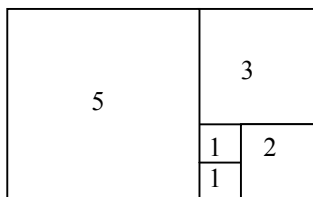
$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 = a_n a_{n+1}.$$

Uma demonstração desta fórmula é dada em [2].

Esta fórmula nos dá uma maneira de decompor um retângulo de lados iguais a a_n e a_{n+1} em quadrados de lados $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Por exemplo, consideremos a soma

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 5 \times 8.$$

Logo um retângulo de lados 5 e 8 pode ser decomposto em dois quadrados de lado 1, em quadrados de lados 2, 3 e 5. A figura abaixo nos mostra como fazer esta decomposição.



Mais alguns exemplos

1. Considere a sequência dada por

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

$$a_n = -5n + 1, \text{ onde } n \in \mathbf{N}.$$

Observe que $a_1 = -4$; $a_2 = -8$; $a_3 = -12$; $a_4 = -16$; Todos os termos desta sequência são negativos pois

$$n \geq 1 \Rightarrow -5n \leq -5 \Rightarrow a_n = -5n + 1 \leq -4$$

2. Considere a sequência dada por

$$a_n = \frac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Seus termos são $a_1 = \frac{1}{2}$; $a_2 = \frac{1}{3}$; $a_3 = \frac{1}{4}$; $a_4 = \frac{1}{5}$, Os termos desta sequência estão em ordem decrescente, pois

$$n+1 < n+2 \Rightarrow \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2}, \quad \text{logo } a_n > a_{n+1}$$

Observe que se $a_n = \frac{1}{n+1}$ então $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)+1} = \frac{1}{n+2}$.

3. Considere a sequência de números ímpares dada por $a_n = 2n+1$, $n \in \mathbf{N}$. Vamos mostrar que a diferença entre dois termos consecutivos, o maior menos o menor, é sempre constante e igual a 2.

Primeiro vamos calcular algumas destas diferenças.

$$a_2 - a_1 = 5 - 3 = 2; \quad a_3 - a_2 = 7 - 5 = 2; \quad a_4 - a_3 = 9 - 7 = 2.$$

Desta forma “parece” que a afirmação é verdadeira. Devemos tomar muito cuidado para afirmar, a partir de alguns exemplos, que a afirmação é verdadeira sempre. No máximo podemos afirmar que a afirmação é verdadeira para $n = 1, 2, 3, 4$. No artigo “*Vale para 1, vale para 2, vale para 3, ... vale sempre?*” de Renate Watanabe [6], mostra com muita clareza os erros que podemos cometer ao fazer conclusões precipitadas.

Vamos provar que a afirmação é verdadeira para todo n .

Quando consideramos o termo $a_n = 2n+1$ seu termo consecutivo é

$$a_{n+1} = 2(n+1) + 1 = 2n + 3, \text{ assim}$$

$$a_{n+1} - a_n = 2n + 3 - (2n + 1) = 2 \text{ para todo natural } n.$$

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Logo a diferença de dois termos consecutivos quaisquer, o maior menos o menor, é sempre igual a dois.

4. Dada a sequência $a_n = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, mostre que o quociente entre um termo e seu sucessor é constante e igual a $\frac{1}{2}$. Tente fazer este exercício observando que o sucessor de a_n é

$$a_{n+1} = 2^{n+1}.$$

5. Considere a sequência dada por $a_1=1$ e $a_{n+1}=n + a_n$ para todo número inteiro n positivo, calcule a_{2000} .

Devemos procurar, se for possível, uma maneira de resolver este problema sem ter que calcular todos os termos de ordens 1 a 2000, pois como a sequência é dada por uma equação de recorrência precisaríamos do termo de ordem 1999 para obter o termo de ordem 2000, do termo de ordem 1998 para obter o termo de ordem 1999 e assim por diante.

Uma maneira de se resolver este problema é observar que para todo n inteiro positivo temos

$$a_{n+1} - a_n = n.$$

Assim,

$$a_2 - a_1 = 1$$

$$a_3 - a_2 = 2$$

$$a_4 - a_3 = 3$$

$$a_5 - a_4 = 4$$

....

$$a_{1999} - a_{1998} = 1998$$

$$a_{2000} - a_{1999} = 1999$$

Observe que se somarmos os elementos do lado esquerdo de cada uma das igualdades acima, a primeira parcela de uma equação e a segunda parcela da equação seguinte se anulam. Logo temos

$$a_{2000} - a_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + 1999.$$

Vamos calcular a soma acima observando que cada uma das soma indicadas abaixo é igual a 2000, e ainda temos 999 destas somas, e mais a parcela central que é igual a 1000.

$$\begin{array}{c} \overbrace{1 + 2 + 3 + \dots + 999 + 1000 + 1001 + \dots + 1997 + 1998 + 1999} \\ \underbrace{\hspace{10em}} \end{array}$$

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Assim

$$1 + 2 + \dots + 999 + 1000 + 1001 + \dots + 1998 + 1999 = 1000 + 999 \times 2000,$$

e como $a_1 = 1$, temos

$$a_{2000} - 1 = 1 + 2 + 3 + \dots + 2000 = 1\,999\,000.$$

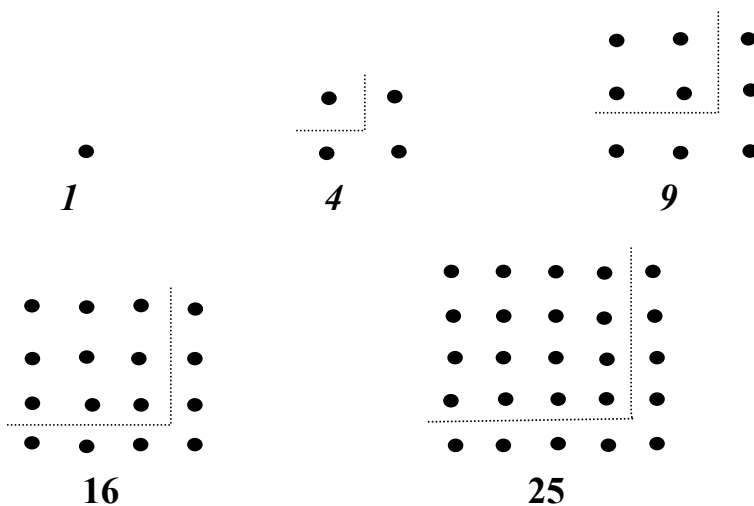
Portanto

$$a_{2000} = 1\,999\,001.$$

Exercícios Propostos

1. Números Quadrangulares

Observe as figuras abaixo.



- a) Observe que o primeiro número triangular e o primeiro número quadrangular são iguais e que a partir do segundo número quadrangular podemos escrevê-los como soma de dois números triangulares

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

consecutivos. Verifique esta afirmação para os 10 primeiros números quadrangulares.

- b) Ache a fórmula de recorrência da sequência de números quadrangulares.

2. Triângulo Aritmético de Fibonacci

A sequência de números ímpares disposta na forma triangular, como mostra a figura abaixo, é chamado **Triângulo Aritmético de Fibonacci** ([1] e [3]).

									1
							3	5	
						7	9	11	
					13	15	17	19	
				21	23	25	27	29	
			31	33	35	37	39	41	

- Complete o **Triângulo Aritmético de Fibonacci** até a décima linha.
- Faça a soma dos termos de cada linha e observe que o resultado é o cubo de um número natural.
- Obtenha a equação que generaliza o resultado da soma de cada linha.
- Determine o primeiro elemento da 78ª linha, sem completar a tabela.
- Quantos elementos tem a linha de ordem 99?

3. Faça o problema 6 da prova do nível 1 da VIII Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás, cujo enunciado está na página 37.

4. Obtenha os dez primeiros termos das sequência dadas abaixo:

- $a_n = n2^n$;
- $a_n = 2n - 1$;
- $a_n = 3n^2 - 2n + 1$;
- $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$;
- $a_1 = 3$ e $a_n = a_{n-1} + 5$;
- $a_1 = -2$ e $a_n = a_{n-1} + n$;
- $a_1 = 6$, $a_2 = 1$ e $a_n = a_{n-1} - 5a_{n-2}$.

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

5. Calcule o termo geral das seqüências dos itens e) e f) do exercício anterior.
6. Uma maneira de se calcular o valor aproximado da raiz quadrada de um número $c > 0$, conhecida desde a época dos babilônios, é calcular os termos da seqüência

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{c}{a_n} \right) \text{ para algum valor inicial } a_1.$$

- a) Calcule os 4 primeiros termos desta seqüência começando com $a_1 = 1$ e $c = 2$.
- b) Mostre que a seqüência a_n é sempre se decrescente a partir de a_2 , isto é, $a_2 > a_3 > \dots > a_n > a_{n+1} > \dots$ quando o valor inicial $a_1 \neq \sqrt{c}$ e $c > 0$.
- c) Mostre que a seqüência é constante quando $a_1 = \sqrt{c}$ e $c > 0$ [4].

Bibliografia

1. Tobias Dantzig, Números: A Linguagem das Ciências, Zahar Editores, Rio de Janeiro, 1970.
2. N. N. Vorobiov, Números de Fibonacci, Editora MIR, Moscou, 1974.
3. Augusto César Morgado et. al., Progressões e Matemática Financeira, CPM, SBM, Rio de Janeiro, 1993.
4. Gisele de Araújo P. Gusmão et. al., Resolução Comentada da VII Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás, IME/UFG, Goiânia, 1998.
5. O Diabo dos Números, Hans Magnus Enzensberger, Cia das Letras, Rio de Janeiro, 1998.
6. Renate Watanabe, “Vale para 1, vale para 2, vale para 3, ... ,vale sempre”, Revista do Professor de Matemática nº 09, 2º semestre de 1986, SBM, São Paulo.
7. E. Batschelet, Introdução à Matemática para Biocientistas, Ed. Interciências, São Paulo, 1978.

Gisele de Araújo Prateado Gusmão
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
Goiânia, GO, Brasil
gisele@mat.ufg.br

Números Reais

Mauricio Donizetti Pieterzack – IME - UFG

Na grande maioria das vezes quando falamos em números reais dizemos que o conjunto dos números reais constitui-se dos números *racionais*, juntamente com os *irracionais*. Mas, o que são esses *números irracionais*? A construção dos números reais, logicamente bem fundamentada, é um capítulo bem interessante na História da Matemática. Embora só realizada no século XIX, ela tem raízes na matemática grega do século IV A.C. O acompanhamento do desenvolvimento histórico das idéias que culminaram com o conceito de número real que temos hoje, é estimulante e enriquecedor na formação do aluno, sobretudo de sua capacidade de apreciação crítica da disciplina, além, é claro, de tornar-nos claro em que contexto e qual o motivo para que tal trabalho fosse realizado. Nestas notas pretendemos fazer uma breve introdução histórica sobre a evolução do conceito de número real, começando nas primeiras civilizações que deixaram as suas pegadas no estudo da matemática e terminando com a formalização do conceito de número real atual, passando pelo período chamado de Idade Heróica na Grécia antiga, período esse em que viveu-se a primeira crise no desenvolvimento da matemática com o aparecimento dos chamados incomensuráveis ou números irracionais. Naquela mesma época, Eudoxo, como diz Euclides em seus *Elementos*, resolveu satisfatoriamente o problema dos incomensuráveis, que iremos abordar mais tarde, tanto que a solução que Eudoxo deu ao problema perdurou por mais de 2000 anos até o século XIX, quando se deu a construção dos números reais devido aos trabalhos de vários matemáticos, principalmente Richard Dedekind. O que é interessante nessa história é que a idéia na qual Dedekind se apoiou para realizar essa formalização é essencialmente a idéia usada por Eudoxo tanto tempo atrás.

Estas notas fazem parte de um mini curso que o autor ministrou no III Encontro de Matemática e Estatística da UFG no ano de 1999.

1. Uma breve reflexão sobre as origens da matemática

Os matemáticos do século vinte desempenham uma atividade intelectual altamente sofisticada, que não é fácil definir, mas boa parte do que hoje se chama matemática deriva de idéias que originalmente estavam centradas nos conceitos de número, grandeza e forma. Noções primitivas relacionadas com os conceitos de número, grandeza e forma podem ser encontradas nos primeiros tempos da raça humana e vislumbres de noções matemáticas se encontram em formas de vida que podem datar de milhões de anos antes da humanidade. Uma percepção de diferenças de padrões em seus ambientes claramente existe em

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

muitas formas inferiores de vida e isso tem parentesco com a preocupação de um matemático com forma e relação.

Em certa época pensou-se que a matemática se ocupava do mundo que nossos sentidos percebem e foi somente no século dezenove que a matemática pura se libertou das limitações sugeridas por observações da natureza. É claro que a matemática originalmente surgiu como parte da vida diária do homem e, se há validade no princípio biológico da *sobrevivência do mais apto*, a persistência da raça humana provavelmente tem relação com o desenvolvimento no homem de conceitos matemáticos. A princípio as noções primitivas de número, grandeza e forma podiam estar relacionadas com contraste mais do que com semelhanças - a diferença entre um lobo e uma matilha, a desigualdade de tamanho entre uma sardinha e uma baleia, a dissemelhança entre a forma redonda da lua e a retilínea de uma pinheira. A partir da massa de experiências caóticas deve ter surgido gradualmente a realização de que há analogias e dessa percepção de semelhança entre número e forma nasceram a ciência e a matemática. As próprias diferenças podem indicar semelhanças, pois o contraste entre um lobo e muitos, entre um carneiro e um rebanho, entre uma árvore e uma floresta, sugerem que um lobo, um carneiro e uma árvore têm algo em comum - sua unicidade. Pelo fato de que até hoje alguns povos primitivos ainda contem objetos dispondo-os em grupos de dois e certas línguas, inclusive o grego, conservaram em sua gramática uma distinção entre um, dois e mais de dois, podemos supor que o desenvolvimento do conceito de número foi um processo longo e gradual. Com a idéia de número tornando-se mais ampla e vívida era preciso exprimir a propriedade de algum modo, a princípio na linguagem de sinais. Usando os dedos de uma das mãos podia-se indicar um conjunto de dois, três, quatro ou cinco elementos, não sendo o número um geralmente reconhecido como um verdadeiro número. Usando-se os dedos de ambas as mãos pode-se representar coleções contendo até dez elementos e usando-se as mãos e os pés pode-se ir até vinte. Para conjuntos com mais de vinte elementos costumava-se usar montes de pedras, geralmente amontoados em grupos de cinco, pois os quintuplos lhes eram familiares pela observação da mão e pé humanos. Como Aristóteles observou há muito tempo, o uso hoje difundido do sistema decimal é apenas o resultado do acidente anatômico de que quase todos nós nascemos com dez dedos nas mãos e nos pés.

O homem difere de outros animais de modo mais acentuado pela sua linguagem, cujo desenvolvimento foi essencial para que surgisse o pensamento matemático abstrato; no entanto, palavras que exprimem idéias numéricas surgiram lentamente. *Sinais* para números provavelmente precederam *palavras* para números.

Embora suponha-se que a matemática tenha surgido em resposta a necessidades práticas, sugeriu-se que a arte de contar surgiu em conexão com rituais religiosos primitivos e que o aspecto ordinal precedeu o conceito

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

quantitativo (tinha que se saber a ordem em que iriam entrar em uma determinada cerimônia, por exemplo). Além disso, uma tal origem indicaria a possibilidade de que o contar tenha uma origem única, espalhando-se subseqüentemente para outras partes da terra.

O conceito de número inteiro é o mais antigo na matemática. A noção de fração racional surgiu relativamente tarde, pois aparentemente entre as tribos primitivas não parece ter havido necessidade de usar frações. Afirmar sobre as origens da matemática, seja da aritmética ou da geometria, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever. Tanto Heródoto quanto Aristóteles não quiseram se arriscar a propor origens mais antigas que a civilização egípcia, mas é claro que a geometria que tinham em mente tinha raízes mais antigas. Podemos fazer conjecturas sobre o que levou os homens da Idade da Pedra a contar, medir e desenhar. Que os começos da matemática são mais antigos que as mais antigas civilizações, é claro. Ir além e identificar categoricamente uma origem determinada no espaço e no tempo, no entanto, é confundir conjectura com história. O mais correto é ir adiante, ao terreno da história da matemática encontrada em documentos escritos que chegaram até nós.

Antes do quarto milênio A. C. uma forma primitiva de escrita estava em uso tanto no vale mesopotâmico, quanto no Nilo. Lá os símbolos primitivos, registros pictográficos, por um processo de gradual convencionalização, evoluíram para uma ordem linear de símbolos mais simples. Na Mesopotâmia, onde o barro era abundante, marcas em forma de cunha eram feitas com um estilete sobre tabletas moles e depois eram cozidas em fornos ou ao calor do sol. Esse tipo de escrita chama-se cuneiforme (do latim *cuneus*, cunha) por causa da forma dos sinais. Documentos cuneiformes tinham grande durabilidade, por isso muitos milhares de tais tabletas sobreviveram até nossos dias. Naturalmente, só uma fração dessas se referem a temas relacionados com a matemática.

Algumas informações matemáticas foram retiradas de calendários e pedras tumulares egípcias, mas há um limite para tais informações, pois a matemática é muito mais do que contar e medir, os aspectos que são tratados em inscrições hieroglíficas (isto é, inscrições sagradas). Felizmente temos outras fontes de informação. Um certo número de papiros egípcios, de algum modo, resistiu ao desgaste do tempo por mais de três milênios e meio. O mais extenso dos de natureza matemática é um rolo de papiro de cerca de 30 centímetros de altura e 5 metros de comprimento, que agora está no British Museum, comprado em 1858 numa cidade à beira do Nilo por um antiquário escocês, Henry Rhind; por isso é conhecido com Papiro de Rhind, ou, menos freqüentemente, chamado Papiro Ahmes, em honra do escriba que o copiou por volta de 1650 A. C. O escriba conta que o material provém de um protótipo do Reino do Meio de cerca de 2000 a 1800 A. C., sendo provável que parte desse conhecimento tenha

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

provinho de Imhotep, médico e arquiteto do Faraó Zoser, que superintendeu a construção de sua pirâmide há cerca de 5000 anos. A numeração usada ainda era a decimal, mas foram usados novos símbolos para facilitar e abreviar a escrita. O princípio de ciferização, introduzido pelos egípcios há cerca de 4000 anos e usado no Papiro de Rhind, representou uma importante contribuição à numeração e é um dos fatores que faz do sistema em uso hoje o instrumento eficaz que é.

Já nessa época começaram a aparecer as notações para as frações, que passaram a ter necessidade. No Papiro Ahmes aparecem notações mais simplificadas do que as usadas anteriormente e alguns tipos de frações eram manipuladas livremente, como por exemplo, as frações unitárias, isto é, com

numerador um. A fração $\frac{2}{3}$ tinha um papel especial nos processos aritméticos de modo que, para achar o terço de um número primeiro achavam os dois terços e depois tomavam a metade. No entanto, parece que, tirando a fração $\frac{2}{3}$, os

egípcios consideravam a fração própria geral do tipo $\frac{m}{n}$ não como uma "coisa"

elementar, mas como parte de um processo incompleto. A fração $\frac{3}{5}$, para nós

uma fração irredutível, para eles era escrita como soma de três frações unitárias

$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{15}$. Para facilitar a redução de frações próprias "mistas" à soma de

frações unitárias, o Papiro de Rhind contém algumas tabelas. Em seguida são apresentados problemas sobre questões variadas, pois Ahmes tinha começado sua obra garantindo que ela forneceria um "estudo minucioso e completo de todas as coisas ... e o conhecimento de todos os segredos".

A operação aritmética fundamental no Egito era a adição, e nossas operações de multiplicação e divisão eram efetuadas, no tempo de Ahmes, por sucessivas "duplações", inclusive de frações. Uma exposição mais detalhada dos problemas tratados no Papiro de Rhind pode ser encontrada na referência [B].

Muito das informações sobre a matemática egípcia vem do Papiro Ahmes, o mais extenso documento matemático do antigo Egito, mas há também outras fontes. Podemos citar o Papiro de Kahun, o Papiro de Berlim e um papiro mais ou menos do mesmo tamanho do de Rhind, o Papiro Golonishchev ou de Moscou, contendo basicamente os mesmos problemas abordados no de Rhind, só que de uma maneira menos elaborada. Os egípcios pouco criaram e desenvolveram a matemática que lhes foi herdada pelos seus antepassados. O amor aos deuses benevolentes, o respeito à tradição, a preocupação com a morte e as

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

necessidades dos mortos, tudo isso encorajou um alto grau de estagnação. A matemática de Ahmes era a de seus antepassados e descendentes.

Nos povos comumente denominados de babilônios, no período de 2000 até aproximadamente 600 A. C., na antiga Mesopotâmia o sistema decimal, comum às civilizações tanto antigas quanto modernas, tinha sido submerso da Mesopotâmia sob uma notação que dava a base sessenta como fundamental. Muito se escreveu sobre os motivos para essa mudança. Parece mais provável que a base sessenta fosse adotada conscientemente e legalizada no interesse da metrologia, pois uma grandeza de sessenta unidades pode ser facilmente subdividida em metades, terços, quartos, quintos, sextos, décimos, dozeavos, quinzeavos, vigésimos e trigésimos, fornecendo assim dez possíveis subdivisões. Qualquer que tenha sido a origem o sistema sexagesimal de numeração teve vida notavelmente longa, pois até hoje restos permanecem, infelizmente para a consistência, nas unidades de tempo e medida dos ângulos, apesar da forma fundamentalmente decimal de nossa sociedade.

Os babilônios não tinham, a princípio, um modo claro de indicar uma posição vazia - não tinham um símbolo para indicar o número zero - embora às vezes deixassem um espaço vazio para indicar o zero. As formas usadas para indicar os números 122 e 7202 eram muito parecidas, não ficando claro se era $2(60) + 2$ ou $2(60)^2 + 2$. Ao tempo da conquista por Alexandre, o Grande, no entanto, um símbolo especial, consistindo de duas cunhas colocadas obliquamente, foi inventado para servir para marcar o lugar onde um numeral faltasse. A grande virtude do sistema e da notação dos babilônicos é que ele permitiu estender o princípio da posição às frações. Eles dominavam o poder de computação que a moderna notação decimal para frações decimais nos confere. Para os babilônios, a multiplicação ou adição de 23,45 e 9,876 não eram essencialmente mais difíceis que as mesmas operações entre os inteiros 2345 e 9876, e os mesopotâmios rapidamente exploraram essa importante descoberta. Uma tableta da babilônia antiga contém o cálculo da raiz quadrada de dois até três casas sexagesimais, a resposta sendo escrita, em caracteres modernos, 1;24,51,10, onde se usa ponto e vírgula para separar a parte inteira da fracionária e vírgula para separar posições sexagesimais. Ou seja, $1 + 24(60)^{-1} + 51(60)^{-2} + 10(60)^{-3}$. Esse valor babilônio para $\sqrt{2}$ é aproximadamente 1,414222, diferindo por cerca de 0,000008 do valor verdadeiro. A precisão nas aproximações era relativamente fácil de conseguir para os babilônios com sua notação para frações, a melhor que qualquer civilização tenha possuído até a Renascença. Devido a isso os matemáticos babilônios foram hábeis para desenvolver processos algorítmicos.

Nas obra deixadas pelos babilônios encontramos muitas tabletas com tabelas usadas para a manipulação de processos de adição e multiplicação, alguns processos de interpolação e um sem número de equações algébricas até muito sofisticadas para a época. Foram também encontradas muitas contribuições à

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

geometria, inclusive o conhecimento do Teorema de Pitágoras que, inclusive, possibilitou uma aproximação tão precisa para $\sqrt{2}$. Mais detalhes sobre a obra desenvolvida pelos babilônios podem ser encontrados na referência [B].

A história grega pode ser recuada até o segundo milênio A. C. quando, como invasores iletrados, vindos do norte, abriram caminho até o mar. Não trouxeram tradição matemática ou literária consigo; no entanto, tiveram desejo ansioso de aprender e não demoraram a melhorar o que lhes foi ensinado. Os primeiros Jogos Olímpicos se realizaram em 776 A. C., e por esse tempo uma maravilhosa literatura grega já tinha se desenvolvido, evidenciada pelas obras de Homero e Hesíodo. Da matemática grega da época nada sabemos. Passaram-se ainda quase dois séculos até haver alguma citação, mesmo indireta, da matemática grega. Então apareceram, durante o sexto século A. C., dois homens, Tales e Pitágoras, que tiveram na matemática o papel de Homero e Hesíodo na literatura. Embora Tales e Pitágoras sejam figuras centrais, não sobreviveu nenhuma obra de qualquer deles, nem se sabe se Tales ou Pitágoras jamais compuseram tal obra. Certas frases-chave lhes são atribuídas, tais como "Conhece a ti mesmo" no caso de Tales e "Tudo é número", de Pitágoras - mas nada mais específico. Ficaram muitas lendas e histórias sobre esses dois matemáticos, mas pouco se sabe sobre suas vidas. Tales era muito discutido sendo atribuídas a ele várias facetas e lendas. Devido a várias estórias, algumas passadas por terceiros, é que vêm as designações de Tales como o primeiro matemático.

Pitágoras é uma figura pouco menos discutida do que Tales, pois foi mais completamente envolto em lenda e apoteose. Tales era um homem de negócios, mas Pitágoras era um profeta e um místico, nascido em Samos, uma das ilhas do Dodecaneso, não longe de Mileto, o lugar do nascimento de Tales. A ordem fundada por Pitágoras era comunitária além de secreta. Conhecimento e propriedade eram comuns, por isso descobertas não eram atribuídas a membros específicos da escola, em geral creditadas aos líderes. É melhor por isso falar das contribuições dos Pitagóricos.

A escola pitagórica era politicamente conservadora e tinha um código de conduta rígido. O vegetarianismo era imposto aos seus membros. As palavras "filosofia"(ou "amor à sabedoria") e matemática(ou "o que é aprendido") supõe-se terem sido criadas pelo próprio Pitágoras para descrever suas atividades intelectuais. Supõe-se que a maior parte do conteúdo dos dois primeiros livros de *Os Elementos*, de Euclides, é devida aos pitagóricos. Isso pressuporia um alto nível de realização, implicando em desenvolvimento bastante rápido do assunto depois dos dias de Tales e Pitágoras. Essa idéia exige fé no que se chamou de "o milagre grego", pelo qual os relativamente iletrados recém-vindos à cena mediterrânea dominaram o material herdado de seus vizinhos e rapidamente subiram a novos cumes, estabelecendo de

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

passagem o molde dedutivo essencial dos teoremas. Algumas dúvidas sérias sobre a veracidade desses fatos foram levantadas.

Na Mesopotâmia a geometria não tinha sido muito mais do que uma aplicação dos números à extensão espacial; ao que parece, a princípio era mais ou menos o mesmo para os pitagóricos, mas com uma modificação. Número no Egito significava o domínio dos números naturais e as frações unitárias; entre os babilônios o corpo das frações racionais. Na Grécia a palavra número era usada só para os *números inteiros*. Uma fração não era considerada com um ente único mas como uma razão ou relação entre inteiros. Como Euclides mesmo disse (*Os elementos* V, 3), "Uma razão é uma relação entre grandezas de mesma espécie". Segundo o lema dos pitagóricos "tudo é número". Filolaus, um dos membros da escola pitagórica, afirmou que "Todas as coisas que podem ser conhecidas têm números; pois não é possível que sem número qualquer coisa possa ser concebida ou conhecida".

De modo geral, parecem ter existido dois sistemas principais de numeração na Grécia: um, provavelmente o mais antigo, é conhecido como notação ática (ou herodiânica); o outro é chamado sistema jônico (ou alfabético). Ambos, quantos aos inteiros, são em base dez, mas o primeiro é mais primitivo. O sistema jônico provavelmente começou a ser usado desde o quinto século A. C., talvez desde o oitavo século.

A história da matemática durante o tempo de Tales e dos pitagóricos depende necessariamente, em grau indesejável, de conjecturas e inferências, pois faltam inteiramente documentos da época. Há muito mais incerteza quanto à matemática grega de 600 A. C. a 450 A. C. do que acerca da álgebra babilônica ou da geometria egípcia de cerca de 1 700 A. C. Nem mesmo artefatos matemáticos dos primeiros tempos da Grécia se preservaram. Praticamente não existem documentos matemáticos ou científicos até os dias de Platão no quarto século A. C. No entanto, durante a segunda metade do quinto século circulam relatos persistentes e consistentes sobre um punhado de matemáticos que evidentemente estavam intensamente preocupados com problemas que formaram a base da maior parte dos desenvolvimentos posteriores na geometria. Por esse motivo, esse período é chamado a "Idade Heróica da Matemática", pois raramente, antes ou depois, homens com tão poucos recursos atacaram problemas de tal significado matemático. A atividade matemática havia florescido em volta de todo o Mediterrâneo e não apenas em extremidades praticamente opostas do mundo grego. No que agora é o sul da Itália havia Arquitas de Tarento (nasceu em 428 A. C. aproximadamente) e Hipasus de Metapontum (viveu por volta de 400 A. C. aproximadamente); em Abdera na Trácia achamos Demócrito (nasceu em 460 A. C. aproximadamente); mais perto do centro do mundo grego, na península ática, havia Hípias de Elis (nasceu em 460 A. C. aproximadamente), e em Atenas viveram em tempos diferentes durante a segunda metade, a crítica, do quinto século A. C., três

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

matemáticos de outras regiões: Hipócrates de Chios (viveu por volta de 430 A. C.), Anaxágoras de Clazomene (morreu em 428 A. C.) e Zeno de Elea (viveu por volta de 450 A. C.). A obra desses sete matemáticos demonstra bem a mudança por que passou a matemática grega um passo antes do ano 400 A. C.

A prosperidade e a atmosfera intelectual de Atenas durante o quinto século A. C. atraíram estudiosos de todas as partes do mundo grego e uma síntese de vários aspectos foi conseguida. Da Jônia vieram homens como Anaxágoras de espírito prático; do sul da Itália vieram outros como Zeno, com inclinações metafísicas mais fortes. Zeno ficou conhecido, principalmente em nossa época, pelos seus paradoxos, que causaram tanta perturbação em seu tempo. Demócrito de Abdera defendeu uma visão materialista do mundo, enquanto que Pitágoras, na Itália, sustentava atitudes idealistas na ciência e na filosofia. Anaxágoras foi preso em Atenas por impiedade, ao assegurar que o Sol não era uma divindade, mas uma grande pedra incandescente, grande como todo o Peloponeso, e que a Lua era uma terra habitada que emprestava do Sol a sua luz. Apesar de ser primariamente um filósofo da natureza mais do que um matemático, conta-nos Plutarco que enquanto Anaxágoras esteve preso se ocupou com a tentativa de quadrar o círculo, usando apenas régua e compasso. Essa é a primeira menção de um problema que iria fascinar os matemáticos por mais de 2000 anos. Data-se dessa mesma época outros dois problemas célebres, a duplicação do cubo e a triseção do ângulo, ambos resolvíveis apenas com régua e compasso. Mais de 2200 anos mais tarde seria provado que todos os três problemas são impossíveis de se resolver somente com régua e compasso.

Outros matemáticos dessa época realizaram contribuições no desenvolvimento da geometria, resolução de equações e teoria dos números inteiros. Podemos citar, entre outros, Hipócrates, Hípias (fazia parte dos sofistas que "vendiam" seus conhecimentos), Arquitas e Filolaus, dois pitagóricos.

Hipásus de Metapontum (aparentemente para onde Pitágoras se retirou no fim da vida morrendo por volta de 500 A. C.), diz-se ter sido inicialmente um pitagórico, que foi depois expulso da confraria. Uma história diz que os pitagóricos lhe erigiram um túmulo, como se estivesse morto; outra que sua apostasia foi punida pela morte num naufrágio. A causa exata da ruptura não é conhecida, em parte por causa da regra de segredo, mas três possibilidades foram sugeridas. Segundo uma, Hipásus foi expulso por insubordinação política tendo chefiado um movimento democrático contra a conservadora regra pitagórica. Uma segunda atribui a expulsão a indiscrições relativas à geometria do pentágono ou do dodecaedro, talvez uma construção de uma dessas figuras. Uma terceira explicação mantém que a expulsão foi relacionada com a revelação de uma descoberta matemática de significação devastadora para a filosofia pitagórica - a da existência de grandezas incomensuráveis.

Era um artigo de fé fundamental do pitagorismo que a essência de tudo, tanto na geometria como nas questões práticas e teóricas da vida do homem,

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

pode ser explicada em termos de *arithmos*, ou das propriedades intrínsecas dos números inteiros e suas razões. Os diálogos de Platão mostram, no entanto, que a comunidade matemática grega fora assombrada por uma descoberta que praticamente demolia a base da fé pitagórica nos inteiros. Tratava-se da descoberta que na própria geometria os inteiros e suas razões eram insuficientes para descrever mesmo simples propriedades básicas. Não bastam, por exemplo, para comparar a diagonal de um quadrado ou de um cubo ou de um pentágono com seu lado. Os segmentos são incomensuráveis, não importa quão pequena se torne a unidade de medida. Quando ou como foi feita a descoberta não se sabe, mas muita tinta se gastou em apoio de uma ou outra hipótese. Argumentos antigos a favor de uma origem hindu da descoberta não têm base e parece improvável que o próprio Pitágoras conhecesse o problema da incomensurabilidade. A sugestão mais plausível é que a descoberta fosse feita por pitagóricos em algum momento antes de 410 A. C. Alguns a apontam especificamente a Hipasus de Metapontum durante a primeira parte do último quarto do quinto século A. C. enquanto que outros a colocam meio século mais tarde.

2. A Primeira Crise no Desenvolvimento da Matemática: Grandezas Incomensuráveis

2.1. Mais um pouco de história

A Idade Heróica se situa principalmente no quinto século A. C. e desse período quase nenhuma evidência direta restou sobre o desenvolvimento da matemática. As histórias de Heródoto e Tucídides e as peças de Ésquilo, Eurípedes e Aristófanes até certo ponto se preservaram, mas quase não há uma linha do que foi escrito pelos matemáticos da época. Fontes matemáticas de primeira mão do quarto século A. C. são igualmente raras, mas essa falta é suprida em grande parte pelas exposições escritas por filósofos que acompanharam de perto a matemática de seu tempo. Temos a maior parte do que Platão escreveu a cerca de metade da obra de Aristóteles, além, é claro, da obra de Platão.

Anteriormente havíamos incluído Arquitas entre os matemáticos da Idade Heróica, mas num certo sentido ele é uma figura de transição na matemática durante o tempo de Platão. Foi um dos últimos pitagóricos, tanto liberal quanto figuradamente. Podia acreditar que o número era o que há de mais importante na vida e na matemática, mas a onda do futuro ia elevar a geometria à posição de supremacia, em grande parte devido ao problema da incomensurabilidade. De outro lado, diz-se que foi Arquitas quem estabeleceu o *Quadrivium* – aritmética, geometria, música e astronomia - como o núcleo de uma educação liberal e nisto suas opiniões iriam dominar muito do pensamento pedagógico até

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

nossos dias. As sete artes liberais, que permaneceram intocáveis por dois milênios, eram constituídas pelo *quadrivium* de Arquitas mais o *trivium* da gramática, da retórica e da dialética de Zeno. Por isso pode-se com alguma justiça sustentar que os matemáticos da Idade Heróica foram responsáveis por muito, quanto à orientação nas tradições educacionais do Ocidente, especialmente na forma transmitida pelos filósofos do quarto século A. C.

O quarto século A. C. iniciou-se com a morte de Sócrates, um filósofo que adotou o método dialético de Zeno e repudiou o pitagorismo de Arquitas. No *Phaedo* de Platão, o diálogo em que as últimas horas de Sócrates são tão magnificamente descritas, vemos como profundas dúvidas metafísicas impediam que Sócrates se dedicasse à matemática ou à ciência da natureza. “Não posso me convencer de que, quando se soma um a um, o um a que foi feita a adição se transforma em dois, ou que duas unidades somadas façam dois em consequência da adição. Não posso entender como quando separadas cada uma era um e não dois e agora, quando reunidas, a simples justaposição ou encontro delas seja causa de se tornarem dois” (Plato, *Dialogues*, traduzido por Benjamin Jowett, Oxford, 1871, 4 volumes). Segundo a filosofia Pitagórica tudo é número, todas as coisas têm número. Por exemplo, ao “somarmos” uma maçã com uma pêra elas continuarão sendo uma maçã e uma pêra e não “dois”. Por isso, a influência de Sócrates no desenvolvimento da matemática foi ínfimo, se não negativa. Isso torna ainda mais surpreendente que seu discípulo e admirador, Platão, se tornasse a inspiração para a matemática do quarto século A. C.

Embora Platão não tenha dado contribuição específica digna de nota a resultados matemáticos técnicos, ele era o centro da atividade matemática da época e guiava e inspirava seu desenvolvimento. Sobre as portas de sua escola lia-se: “Que ninguém que ignore a geometria entre aqui”. Seu entusiasmo pelo assunto fez com que se tornasse conhecido não como matemático mas como “o criador de matemáticos”. É claro que a alta opinião que tinha da matemática, Platão não recebeu de Sócrates; na verdade, os primeiros diálogos platônicos raramente mencionam a matemática. Quem converteu Platão a uma visão matemática foi certamente Arquitas, um amigo a quem ele visitou na Sicília em 388 A. C. Como dissemos a matemática foi profundamente influenciada por Platão nessa época e vários matemáticos fizeram importantes contribuições para o seu desenvolvimento. Podemos citar os nomes de Teodoro de Cirene (viveu por volta de 390 A. C.), Teetetis (morreu em 368 A. C.), Eudoxo de Cnido (morreu por volta de 355 A. C.), Menaecmus (viveu por volta de 350 A. C.) e seu irmão Dinóstrato (viveu por volta de 350 A. C.) e Autolicus de Pitane (viveu por volta de 330 A. C.).

No seu diálogo *Teetetis*, em homenagem ao jovem matemático ateniense de mesmo nome que morreu de uma combinação de ferimentos recebidos em batalha e disenteria, Platão descreve uma discussão de Teetetis com Sócrates e

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

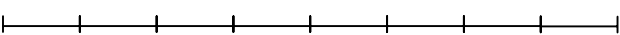
Teodoro sobre a natureza dos incomensuráveis. Aí são feitas distinções não só entre grandezas comensuráveis e incomensuráveis, mas entre aquelas que, sendo incomensuráveis em comprimento, são ou não são incomensuráveis em quadrado. Grandezas como $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ são incomensuráveis em comprimento mas são comensuráveis em quadrado, pois seus quadrados têm razão 3 para 5. As grandezas $\sqrt{1+\sqrt{3}}$ e $\sqrt{1+\sqrt{5}}$, por outro lado, são incomensuráveis tanto em comprimento quanto em quadrado. Nessa mesma obra, falando da então recente descoberta da irracionalidade de $\sqrt{2}$, Platão diz que seu mestre, Teodoro de Cirene – de quem Teatetus também fora aluno – tinha sido o primeiro a provar a irracionalidade das raízes quadradas dos inteiros não quadrados de 3 a 17 inclusive. Não se sabe como ele o fez, nem por que parou em $\sqrt{17}$.

A Academia Platônica de Atenas tornou-se o centro matemático do mundo e dessa escola provieram os principais mestres e pesquisadores durante os meados do quarto século A. C. Desses o maior foi Eudoxo de Cnido (408-355? A. C.), que foi um dos discípulos de Platão e tornou-se o mais célebre matemático e astrônomo de seu tempo. Na juventude de Platão a descoberta do incomensurável causou um verdadeiro escândalo lógico, pois pareceu arruinar teoremas envolvendo proporções. Duas grandezas são incomensuráveis quando sua razão não é igual à de algum número (inteiro) para um outro número (inteiro). Como então comparar grandezas incomensuráveis? Se Hipócrates realmente provou que as áreas de círculos estão entre si como os quadrados dos diâmetros, deve ter tido algum modo de manejar proporções ou igualdade de razões. Não sabemos como o fez, ou se ele, até certo ponto, antecipou Eudoxo, que deu uma nova definição, geralmente aceita, de razões iguais. Segundo Arquimedes foi também Eudoxo quem forneceu o lema que hoje tem o nome de Arquimedes, às vezes chamado de *Axioma de Arquimedes* e que serviu de base para o método de exaustão, o equivalente grego do cálculo integral. Do axioma de Eudoxo (ou de Arquimedes) é fácil, por uma *reductio ad absurdum*, provar uma proposição que formava a base do chamado *método de exaustão* dos gregos, que era usado para provar teoremas sobre áreas e volumes de figuras curvilíneas.

Eudoxo foi sem dúvida o melhor matemático da Idade Helênica, mas todas as suas obras se perderam. É possível que a estimativa aristotélica para a circunferência da Terra – cerca de 400 000 estádios ou 60 000 quilômetros – seja de Eudoxo, pois Arquimedes relata que Eudoxo tinha calculado que o diâmetro do Sol era nove vezes o da Terra. Apesar das inúmeras contribuições que Eudoxo deu à matemática de seu tempo, vamos nos ater à questão das grandezas incomensuráveis.

2.2. Grandezas Incomensuráveis

Como vimos anteriormente os matemáticos gregos lidavam com a questão de comparar grandezas de mesma espécie, como por exemplo, dois segmentos de reta, duas áreas ou dois volumes. No caso de dois segmentos retilíneos AB e CD, dizer que a razão AB/CD é o número racional m/n , significava para eles (e ainda significa para nós) que existia um terceiro segmento EF tal que AB fosse m vezes EF e CD n vezes esse mesmo segmento EF.

A  B

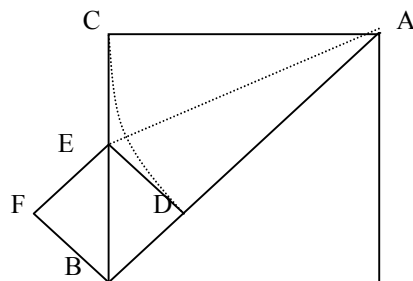
C  D  F

$$\frac{AB}{CD} = \frac{8}{5}$$

No tempo de Pitágoras – e mesmo durante boa parte do quinto século A. C. - pensava-se que os números inteiros bastavam para comparar razões entre segmentos de reta, isto é, dados dois segmentos de reta AB e CD, seria sempre possível encontrar um terceiro segmento EF contido um número inteiro de vezes em AB e outro número inteiro de vezes em CD, situação esta que descreveremos dizendo que EF é um *submúltiplo comum* de AB e CD. Esta idéia é muito razoável, afinal se EF não serve, podemos imaginar um segmento menor, outro menor ainda e assim por diante. Nossa intuição geométrica parece dizer-nos que há de existir um certo segmento EF, talvez muito pequeno, mas satisfazendo aos propósitos desejados. Dois segmentos nessas condições são ditos *comensuráveis*, justamente por ser possível medi-los ao mesmo tempo, com a mesma unidade EF. Entretanto, não é verdade que dois segmentos quaisquer sejam sempre comensuráveis. Em outras palavras, existem segmentos AB e CD sem unidade comum EF, os chamados *incomensuráveis*. Esse é um fato que contraria nossa intuição geométrica, e por isso mesmo a descoberta de grandezas incomensuráveis na antiguidade representou um momento de crise no desenvolvimento da matemática.

Ao que tudo indica os pitagóricos descobriram grandezas incomensuráveis através de argumentos geométricos, como o que apresentaremos a seguir, demonstrando que o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos incomensuráveis.

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás



Na figura representamos um quadrado com diagonal $\delta = AB$ e lado $\lambda = AC$. Suponhamos que δ e λ sejam comensuráveis. Então existirá um terceiro segmento σ que seja submúltiplo comum de δ e λ . Fazemos agora a seguinte construção: traçamos o arco CD com centro em A e o segmento ED tangente a esse arco em D , de sorte que $AD = AC$. Então, nos triângulos retângulos ACE e ADE , os catetos AC e AD são iguais e a hipotenusa AE é comum. Logo são também iguais os catetos CE e $DE (= BD)$. Portanto,

$$\delta = AB = AD + BD = \lambda + BD$$

$$\lambda = BC = BE + EC = BE + BD$$

Ou seja,

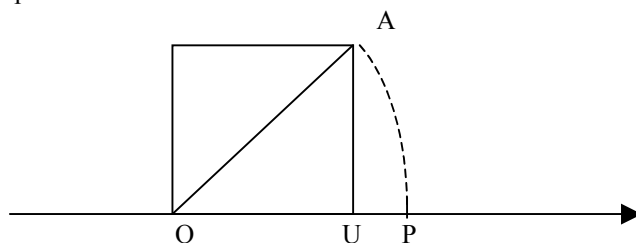
$$\delta = \lambda + BD \quad (*)$$

$$\lambda = BE + BD \quad (**)$$

Como o segmento σ é submúltiplo comum de δ e λ , concluímos, por $(*)$, que σ também é submúltiplo de BD . Daqui e de $(**)$ segue-se que σ também é submúltiplo de BE . Provamos assim que se houver um segmento σ que seja submúltiplo comum de $\delta = AB$ e $\lambda = AC$, então o mesmo segmento σ será submúltiplo comum de BE e BD , segmentos esses que são a diagonal e o lado do quadrado $BDEF$. Ora, a mesma construção geométrica que nos permitiu passar do quadrado original para o quadrado $BDEF$ pode ser repetida com este último para chegarmos a um quadrado menor ainda; e assim por diante, indefinidamente; e esses quadrados vão se tornando arbitrariamente pequenos, pois, como é fácil de ver, as dimensões de cada quadrado diminuem em mais da metade quando passamos de um deles a seu sucessor. Dessa maneira, provamos que o segmento σ deverá ser submúltiplo comum do lado e da diagonal de um quadrado tão pequeno quanto desejemos. Evidentemente, isso é um absurdo! Somos, pois, levados a rejeitar a suposição inicial de que o lado AC e a diagonal AB do quadrado original sejam comensuráveis. Concluímos, pois, que o lado e a diagonal de qualquer quadrado são *grandezas incomensuráveis*.

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Uma consequência da existência de segmentos incomensuráveis é a existência de pontos na reta sem abscissas racionais.



De fato. Com referência à figura acima, basta tomar $OP = OA$, onde OA é a diagonal de um quadrado unitário OU . Como OP e OU são incomensuráveis, não é possível expressar a razão OP/OU como um número racional.

Que número seria a abscissa de P ? Pelo Teorema de Pitágoras temos,

$$OA^2 = OU^2 + UA^2$$

Como $OA = OP$ e $UA = OU = 1$, obtemos

$$OP^2 = 2 \quad OU^2 = 2.$$

Ou seja,

$$OP = \sqrt{2}.$$

É essa a abscissa de P tomando-se OU como unidade de comprimento.

Como curiosidade, vamos mostrar através de um argumento puramente numérico a irracionalidade de $\sqrt{2}$.

Começamos supondo que existisse uma fração irredutível m/n tal que $\sqrt{2} = m/n$. Assim,

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 2n^2.$$

Daqui segue-se que m^2 é um número par, portanto m é par (se m fosse ímpar, m^2 seria ímpar), isto é, $m = 2r$, sendo r outro número inteiro. Substituindo $m = 2r$ na expressão acima obtemos,

$$4r^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2r^2.$$

Esta expressão nos diz que n^2 é um número par, logo n também é par. Chegamos a um absurdo, pois m/n é uma fração irredutível. Logo a suposição de que $\sqrt{2}$ é um número racional m/n está errada.

Evidentemente se todos os pares de segmentos fossem comensuráveis bastariam os números racionais não negativos para caracterizar os pontos da semi-reta não negativa. Isto é, os números da forma m/n , com m, n inteiros, $m \geq 0$ e $n > 0$. É bom observar que isso condiz muito bem com nossa intuição geométrica: afinal, esses números ficam densamente distribuídos ao longo da semi-reta, de tal forma que entre dois deles há sempre uma infinidade de números do mesmo tipo.

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Com a prova de que haviam segmentos incomensuráveis, de imediato tornou-se impossível falar em razão entre duas grandezas quando essas fossem incomensuráveis. Havia a necessidade de se inventarem os números irracionais, o que só ocorreu nos tempos modernos. Mas os gregos souberam como contornar esse problema, logo na primeira metade do quarto A. C. e com muita genialidade. Embora não falasse em razão, Eudoxo desenvolveu, de maneira brilhante, uma teoria das proporções com a qual foi possível superar a dificuldade dos incomensuráveis, usando apenas os números inteiros positivos. A solução de Eudoxo, conquanto genial, teve o efeito de afastar os gregos de um desenvolvimento numérico da matemática, que a partir de então torna-se Geometria. Os problemas aritméticos e algébricos são tratados em *Os Elementos* de Euclides de maneira geométrica. A Aritmética e a Álgebra só voltariam a ganhar importância e autonomia próprias no mundo ocidental com a influência árabe a partir do século XII.

2.3. A Solução de Eudoxo para o Problema dos Incomensuráveis

Para resolver o problema dos incomensuráveis Eudoxo desenvolveu uma teoria das proporções que permitiu superar a dificuldade dos incomensuráveis sem a necessidade dos números irracionais. Aparentemente os gregos usavam a idéia que quatro quantidades estão em proporção, $a:b = c:d$, se as duas razões $a:b$ e $c:d$ têm a mesma subtração mútua; isto é se em cada razão, a quantidade menor cabe um igual número inteiro de vezes na maior e o resto em cada caso cabe um igual número inteiro de vezes na menor e o novo resto no precedente o mesmo número inteiro de vezes e assim por diante. Uma tal definição é incômoda e foi um brilhante feito de Eudoxo descobrir a teoria das proporções usada no Livro V de *Os Elementos* de Euclides. Antes de apresentarmos a definição dada por Eudoxo vamos relembrar como se define igualdade de frações e razão de grandezas comensuráveis.

Começaremos com a definição de igualdade de fração para facilitar o entendimento do que iremos expor. Como é sabido, as frações surgem pela insuficiência dos números naturais no trato de problemas que envolvem divisão em partes iguais. A igualdade de duas frações deve traduzir o fato de que elas se reduzem, por simplificação, à mesma fração irredutível. Por exemplo:

$$\frac{8}{30} = \frac{4 \times 2}{15 \times 2} = \frac{4}{15},$$
$$\frac{12}{45} = \frac{4 \times 3}{15 \times 3} = \frac{4}{15},$$

de sorte que

$$\frac{8}{30} = \frac{12}{45}.$$

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Desta forma, definimos igualdade de frações como segue.

Definição 1. Diz-se que duas frações $\frac{m}{n}$ e $\frac{m'}{n'}$ são iguais se existem números, primos entre si, p e q , e números inteiros a e b , tais que

$$m = ap, \quad n = aq \quad (1)$$

$$m' = bp, \quad n' = bq \quad (2)$$

Embora esta definição traduza a idéia exata de igualdade de frações que desejamos introduzir, ela é um tanto complicada e pouco prática. A definição a seguir é mais simples.

Definição 2. Diz-se que duas frações $\frac{m}{n}$ e $\frac{m'}{n'}$ são iguais se $mn' = m'n$; isto é,

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \Leftrightarrow mn' = m'n. \quad (3)$$

Na verdade, as duas definições são equivalentes. De fato, se as relações (1) e (2) se verificam obtemos $mn' = m'n$.

Reciprocamente, vamos mostrar que a condição (3) implica na Definição 1. Primeiro notamos que os números m e n podem ser escritos na forma (1), com p e q primos entre si; basta tomar a como sendo o m.d.c. de m e n . Substituindo (1) em (3), obtemos

$$apn' = m'aq,$$

ou ainda

$$pn' = m'q. \quad (4)$$

Isto mostra que p divide $m'q$; como p é primo com q , concluímos que ele divide m' ; isto é, existe um número inteiro b tal que $m' = bp$; esta é a primeira das relações (2). Levando este valor em (4), vem que

$$pn' = bpq,$$

donde segue-se que $n' = bq$, que é a segunda das relações (2).

Como sabemos os números racionais podem ser representados pelas frações. Além disso, frações iguais representam o mesmo número racional e que frações distintas representam números racionais distintos.

Para definirmos razão de grandezas incomensuráveis da forma como Eudoxo o fez, precisaremos primeiro tratar da definição de razão de grandezas comensuráveis. Essa definição pode ser dada para duas grandezas de mesma espécie, tais como, segmentos retilíneos ou áreas ou volumes ou ângulos ou massas, etc. Vamos tratar no caso de segmentos retilíneos.

Definição 3. Dizemos que A está para B na razão $\frac{m}{n}$ e se escreve

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

$$\frac{A}{B} = \frac{m}{n}$$

se existe um segmento σ tal que

$$A = m\sigma \text{ e } B = n\sigma. \quad (5)$$

Em outras palavras estamos dizendo que σ é um submúltiplo comum dos segmentos A e B. A razão de A para B, então, é o número $\frac{m}{n}$.

Algumas observações são necessárias acerca dessa definição. Em primeiro lugar A e B não são números, mas segmentos! No entanto, $\frac{A}{B}$ será o número

$\frac{m}{n}$ pela definição que demos; m é a medida de A com o segmento σ e n a medida de B com o mesmo segmento, chamado, então, a *unidade de medida*. Em segundo lugar, temos de nos certificar de que a definição dada tem significado único e preciso. Pode muito bem acontecer que haja um outro segmento σ' e números m' e n' tais que

$$A = m'\sigma' \text{ e } B = n'\sigma'. \quad (6)$$

Pela definição dada a razão de A para B seria $\frac{m'}{n'}$. Nada a objetar, desde que

$\frac{m}{n}$ seja igual a $\frac{m'}{n'}$, isto é, $mn' = m'n$; mas será isto verdade? E se $\frac{A}{B} = \frac{m}{n}$ de

acordo com a definição 3 e $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$, será verdade que vale a relação (6) com algum σ' ? Mostraremos a seguir que tudo isso é verdade.

Primeiramente suponhamos que (5) e (6) se verifiquem. De (5) obtemos

$$nA = n(m\sigma) = m(n\sigma) = mB$$

isto é, $nA = mB$. Substituindo aqui os valores dados em (6), vem que

$$nm'\sigma' = mn'\sigma'$$

donde concluímos que $mn' = m'n$, ou seja, $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$, que responde afirmativamente à primeira pergunta acima.

Suponhamos agora que (3) e (5) se verifiquem. De (5) obtemos que $nA = mB$ como antes. Dividindo A em m' segmentos iguais (a um certo σ') encontramos $A = m'\sigma'$ que é a primeira das relações de (6). Substituindo-a em $nA = mB$, vem $mB = nm'\sigma'$. Daqui e de (3) segue-se que $mB = mn'\sigma'$, donde $B = n'\sigma'$, que é a segunda das relações (6). Fica assim respondida afirmativamente a segunda pergunta.

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Esta justificativa que fizemos mostra que a definição 3 tem significado único e preciso.

Do mesmo modo que a definição 1 é equivalente à definição 2, no caso de igualdade de frações, também no caso de razão de duas grandezas podemos mostrar que a definição a seguir é equivalente à definição 3.

Definição 4. Diz-se que A está para B na razão $\frac{m}{n}$ se $nA = mB$, isto é,

$$\frac{A}{B} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow nA = mB.$$

Para mostrar que Definição 4 implica na Definição 3 supomos que existem números inteiros m e n tais que $nA = mB$. Em seguida dividimos A em m segmentos iguais a um certo segmento σ : $A = m \sigma$. Daqui e da relação anterior segue-se que $nm\sigma = mB$; logo $B = n\sigma$, o que prova o que queríamos. Como a prova de que a Definição 3 implica na Definição 4 já foi feita na justificativa acima, fica estabelecida a equivalência das definições 3 e 4.

Com essas definições em mãos podemos passar a definir igualdade de duas razões mesmo que os segmentos sejam incomensuráveis. Embora A e B sejam segmentos e não números a Definição 4 atribui significado numérico à razão

$\frac{A}{B}$ quando A e B são comensuráveis. Eudoxo abre mão disso no caso incomensurável. Para ele, o que realmente importa é achar um meio de exprimir

a igualdade de duas razões, $\frac{A}{B}$ e $\frac{C}{D}$, mesmo que nenhuma delas seja um número! (É claro, do ponto de vista dos gregos há mais de 2000 anos.) Para

isso, notamos da Definição 4 que, na hipótese de comensurabilidade, $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ é

o mesmo que escrever: dados os números m e n , então

$$nA = mB \Leftrightarrow nC = mD.$$

Acontece que, se A e B forem incomensuráveis, igualdades do tipo $nA = mB$ nunca ocorrerão! Todavia, dados dois números inteiros quaisquer m e n , podemos certamente testar se

$$nA > nB, nA = mB \text{ ou } nA < mB;$$

$$nC > mD, nC = mD \text{ ou } nC < mD.$$

Após algumas observações preliminares sobre razões, Euclides dá na Definição 5 do Livro V a célebre formulação de Eudoxo:

"Diz-se que grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta se, quando equimúltiplos quaisquer são tomados da primeira e da terceira equimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos são ambos maiores que, ou ambos iguais a, ou ambos

menores que, os últimos equimúltiplos considerados em ordem correspondente."

Esta formulação de Eudoxo é equivalente a formulação atual.

Definição 5. Dados quatro segmentos A, B, C e D, diz-se que A está para B assim como C está para D (isto é, em nossa notação $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$) se, quaisquer que sejam os números m e n , então

$$nA > mB \Leftrightarrow nC > mD$$

$$nA = mB \Leftrightarrow nC = mD$$

$$nA < mB \Leftrightarrow nC < mD$$

A definição de Eudoxo para igualdade de razões se assemelha ao processo de multiplicação cruzada em uso hoje para frações - $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$ - processo equivalente a reduzir ao mesmo denominador.

Por exemplo, para mostrar que $\frac{3}{6} = \frac{4}{8}$, multiplicamos 3 e 6 por 4 obtendo 12 e 24 e multiplicamos 4 e 8 por 3 obtendo o mesmo par de números. Observe que permutamos o 2º e 3º termos na definição de Eudoxo para ficar de acordo com as operações usadas hoje. No entanto, poderíamos usar a definição de Eudoxo. Se tomarmos $A = 3$, $B = 6$, $C = 4$ e $D = 8$ e escolhermos $m = 2$ e $n = 4$ obteremos

$$nA = 12 = mB \Leftrightarrow nC = 16 = mD$$

Se em vez disso, escolhermos $m = 5$ e $n = 7$ obtemos

$$nA = 21 < 30 = mB \Leftrightarrow nC = 28 < 40 = mD$$

Este exemplo numérico não faz justiça à sutileza e eficiência da idéia de Eudoxo, porque a aplicação aqui é trivial. Se tomarmos A e B como volumes esferas e C e D como os cubos de seus raios, teríamos uma idéia melhor sobre o alcance dessa definição de Eudoxo.

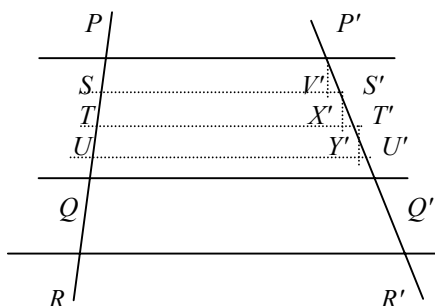
Como aplicação dessa definição vamos provar o chamado *Teorema de Tales*, de importância fundamental em Geometria Plana, pois dele depende toda a teoria de semelhança de figuras: em particular, os teoremas sobre semelhança de triângulos.

Primeiramente, vamos estudá-lo no caso comensurável.

Teorema de Tales. Num mesmo plano três retas paralelas determinam em duas retas transversais segmentos proporcionais.

Isto significa, de acordo com a figura abaixo, que $\frac{PQ}{QR} = \frac{P'Q'}{Q'R'}$.

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás



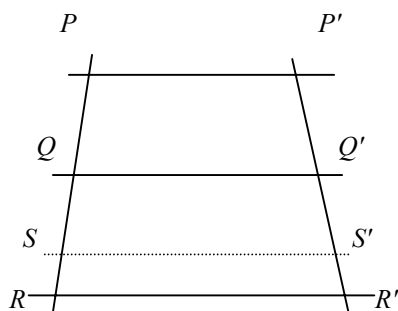
Seja σ um submúltiplo comum de PQ e QR , de sorte que existem inteiros m e n tais que $PQ = m\sigma$ e $QR = n\sigma$. Sobre PQ marcamos $PS = ST = TU = \dots = \sigma$ e traçamos SS' , TT' , UU' , ... paralelos a PP' . A seguir traçamos as retas $P'V'$, $S'X'$, $T'Y'$, ... paralela a PQ . É fácil verificar que os triângulos $P'V'S'$, $S'X'T'$, $T'Y'U'$, ... são todos iguais (congruentes) entre si, de modo que os segmentos $P'S'$, $S'T'$, $T'U'$, ... são todos iguais a um mesmo segmento σ' . Segue-se que $P'Q' = m\sigma'$. De mesmo modo se prova que $Q'R' = n\sigma'$; portanto

$$\frac{PQ}{QR} = \frac{P'Q'}{Q'R'} = \frac{m}{n}.$$

Vamos dar uma idéia da demonstração do Teorema de Tales no caso geral, mesmo que os segmentos envolvidos sejam incomensuráveis. Para isso, dados m e n números inteiros quaisquer, dividimos PQ em m partes iguais a um certo segmento σ , de sorte que $PQ = m\sigma$. Ao longo de QR marcamos n segmentos

σ , perfazendo o segmento QS , isto é, $QS = n\sigma$. É claro então que $\frac{PQ}{QS} = \frac{m}{n}$,

ou seja, $nPQ = mQS$. Pode ser que o ponto S caia entre Q e R , exatamente em R , ou além de R . Vamos supor que a primeira hipótese acontece, como na figura abaixo.



Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Então

$$n PQ = m QS < m QR.$$

Traçando, a seguir, a reta SS' paralela a PP' , obtemos, como na demonstração anterior:

$$\frac{P'Q'}{Q'S'} = \frac{m}{n},$$

ou seja, $n P'Q' = m Q'S'$; portanto,

$$n P'Q' = m Q'S' < m Q'R'.$$

Fica assim provado que

$$n PQ < m QR \Rightarrow n P'Q' < m Q'R'.$$

O raciocínio é o mesmo para provar a recíproca desta última implicação. Isto completa a demonstração de que

$$n PQ < m QR \Leftrightarrow n P'Q' < m Q'R'.$$

De modo análogo se demonstra que

$$n PQ > m QR \Leftrightarrow n P'Q' > m Q'R'$$

e a demonstração de

$$n PQ = m QR \Leftrightarrow n P'Q' = m Q'R'$$

é a mesma da versão anterior do teorema. Com base nas três equivalências

acima concluímos que $\frac{PQ}{QR} = \frac{P'Q'}{Q'R'}$.

A definição 5 encerra grande engenhosidade. Com efeito, é admirável ter ocorrido a alguém, há quase 2400 anos a idéia de definir igualdade de razões mesmo quando não se pudessem identificar essas razões com números. Com ela foi possível construir toda uma teoria das proporções e resolver uma grande crise nos fundamentos da matemática. A solução dada por Eudoxo, evitou os números já que eles se mostraram insuficientes para definir essas grandezas. Isto significou, na história da matemática um desvio de ênfase: o ideal pitagórico de reduzir tudo a números cedia lugar aos fatos geométricos. A matemática passa a ser Geometria, tanto que Platão proclama que "Deus Geometrizava sempre". Apenas em fins do século passado que os números voltaram a ocupar papel de destaque nos fundamentos da matemática. Isto ocorreu devido a trabalhos de Dedekind e de outros matemáticos da época.

2.4. A Construção dos Números Reais

A década de 1870 foi uma década importante para o que chamamos de aritmetização da análise. Já se lidava há algum tempo com as séries infinitas e havia muita falta de confiança nas operações executadas sobre essas séries. Uma outra causa de preocupação era a falta de qualquer definição da expressão "número real" que estava no próprio cerne do programa de aritmetização. Bolzano em 1817 tinha percebido tão bem a necessidade de rigor em análise

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

que Klein o chamava "o pai da aritmetização"; mas Bolzano tinha sido menos influente que Cauchy, cuja análise ainda carregava muito de intuição geométrica.

Richard Dedekind (1831-1916) de Brunswick, estudou em Göttingen, onde foi aluno de Gauss e Dirichlet. Em 1858 tornou-se professor em Zurique, transferindo-se em 1862 para sua cidade natal, onde permaneceu pelo resto de sua vida. Dedekind conta que foi no início de sua carreira, quando teve que ensinar Cálculo Diferencial, que percebeu a falta de uma definição adequada para os números reais, principalmente quando ele teve que provar que uma função crescente e limitada tem limite. Ele também conta que buscou inspiração para sua construção dos números reais na antiga e engenhosa teoria das proporções de Eudoxo.

Um exame mais cuidadoso da definição 5 dada por Eudoxo nos diz que ela exige que consideremos todas as frações $\frac{m}{n}$ e com elas façamos testes para saber se $nA \leq mB$ ou $nA > mB$. Assim ela divide o conjunto dos números racionais em duas classes. Uma constituída dos números $\frac{m}{n}$ tais que, $nA \leq mB$, ou "direita" denotada por D, e outra classe dos números $\frac{m}{n}$ tais que $nA > mB$, ou "esquerda" denotada por E.

É claro que todo elemento de E é menor que todo elemento de D. Assim a razão de $\frac{A}{B}$ como número é impossível, no caso incomensurável, apenas porque não existe número (racional) que esteja entre as duas classes E e D, isto é, que seja maior que todo elemento de E e menor que todo elemento de D. Seria preciso para isso, inventar novos números, os irracionais, coisa que Eudoxo não o fez. Dedekind decerto observou, na definição de Eudoxo, a separação em duas classes sem que entre uma classe e outra houvesse um elemento separador. Dedekind teve a idéia de caracterizar os irracionais através dessas classes "esquerda" e "direita".

É claro que mesmo antes de Dedekind já se trabalhavam com os números irracionais, manipulando-os segundo as leis formais do cálculo com radicais. Assim, embora $\sqrt{3}$ e $\sqrt{12}$ não tivessem significado preciso, multiplicando-os obtemos um resultado claro e inequívoco: $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$. O que faltava era uma teoria que justificasse operações como essa.

Devemos, então, partir do pressuposto que temos uma teoria dos números racionais que justifica todas as operações conhecidas com esses números. A

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

partir daí podemos definir a noção de número real dada por Dedekind. Antes, porém, vamos definir os chamados cortes de Dedekind.

Definição 6. Diz-se que um conjunto α de números racionais é um **corte** se

- (I) α contém pelo menos um número racional, mas não todos;
- (II) se $p \in \alpha$ e $q < p$ (q racional) $\Rightarrow q \in \alpha$;
- (III) em α não existe racional máximo.

À partir dessa definição prova-se que se $p \in \alpha$ e $q \notin \alpha \Rightarrow p < q$. Os elementos de α são chamados de inferiores. Este corte é equivalente ao que chamamos de classe "esquerda" anteriormente. Além disso, se r é um racional e α é o conjunto dos racionais p tais que $p < r$, então α é um corte e r é o número superior mínimo de α . Tal corte é chamado corte racional.

Dados dois cortes α e β , escrevemos $\alpha = \beta$ se de $p \in \alpha$ resulta $q \in \beta$ e de $q \in \beta$ resulta $p \in \alpha$. Esta definição a primeira vista pode parecer supérflua. Mas igualdade nem sempre é identidade. Por exemplo, se $p = \frac{a}{b}$ e $q = \frac{c}{d}$ são

racionais $p = q$ significa $ad = bc$, mas não necessariamente $a = c$ e $b = d$.

Podemos colocar uma relação de ordem no conjunto dos cortes. Se α e β são cortes, $\alpha < \beta$ se existe um racional p tal que $p \in \beta$ e $p \notin \alpha$. Com essa definição prova-se que dados dois cortes α e β , então $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$ ou $\beta < \alpha$. Além disso, essa relação de ordem é transitiva.

O próximo passo é definir uma aritmética no conjunto dos cortes.

Se α e β são cortes, seja γ o conjunto de todos os racionais r tais que $r = p + q$, com $p \in \alpha$ e $q \in \beta$. É fácil de verificar que γ é um corte. O corte γ é chamado *soma* dos cortes α e β designado por $\gamma = \alpha + \beta$.

Convém observar que tanto o símbolo $<$, usado anteriormente, e o símbolo $+$ acima, normalmente usados para os racionais (estamos partindo do conjunto dos números racionais) são usados com outro sentido pois α e β não são números, são conjuntos.

Com essa definição de soma de cortes podemos mostrar que essa operação é comutativa, associativa, tem elemento neutro, denotado como 0 (corte racional do número 0) e elemento inverso. Analogamente como definimos soma de cortes podemos definir o produto de dois cortes α e β , $\delta = \alpha\beta$. Esse produto tem as propriedades comutativa, associativa, distributiva, elemento neutro (da multiplicação) e todas as propriedades gozadas pelos números racionais. Além disso, se indicarmos um corte racional por r^* para diferenciar do número racional r , pode-se provar que:

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

- i) $p^* + q^* = (p + q)^*$;
- ii) $p^* q^* = (pq)^*$;
- iii) $p^* < q^*$ se, e somente se, $p < q$;
- iv) Se α e β são cortes e $\alpha < \beta$ existe um corte racional r^* tal que $\alpha < r^* < \beta$;
- v) Qualquer que seja o corte α , $p \in \alpha$ se, e somente se, $p^* < \alpha$.

Vamos resumir rapidamente o que conseguimos até o momento. Consideramos certos conjuntos de racionais, aos quais chamamos cortes. Uma relação de ordem e duas operações, chamadas adição e multiplicação, foram definidas e a aritmética dos cortes assim obtida obedece às mesmas leis que a aritmética dos racionais. Isso, em outras palavras, significa que o conjunto dos cortes tornou-se o que chamamos um *corpo ordenado*. Em uma classe especial de cortes, os chamados "cortes racionais", vimos que a substituição dos números racionais r pelos cortes r^* correspondentes preserva somas, produtos e ordem (itens i), ii) e iii) acima). Estas propriedades nos permitem identificar o corte racional r^* com o número racional r . Definimos, agora o que entendemos por número real.

Definição 7. Cortes são chamados números reais. Cortes racionais são identificados com números racionais (e chamados números racionais). Todos os demais cortes serão chamados de números irracionais.

Desta forma, estamos considerando os racionais como um subconjunto dos reais. A propriedade iv) nos diz que entre dois números reais quaisquer existe um racional e a propriedade v) nos diz que cada número real α é o conjunto dos racionais p tais que $p < \alpha$.

O teorema seguinte estabelece uma propriedade fundamental do conjunto dos números reais.

Teorema (Dedekind) Sejam A e B conjunto de números reais tais que:

- (a) todo número real está em A ou em B;
- (b) nenhum número real está simultaneamente em A e em B;
- (c) nem A nem B é vazio;
- (d) se $\alpha \in A$ e $\beta \in B$, temos $\alpha < \beta$.

Então, existe um, e somente um, número real γ , tal que $\alpha \leq \gamma$, para todo $\alpha \in A$, e $\gamma \leq \beta$, para todo $\beta \in B$.

Vamos fazer algumas observações acerca deste teorema, que é o ponto chave na construção dos números reais. A existência de γ é a parte mais importante pois ela mostra que as lacunas encontradas no conjunto dos números racionais estão agora preenchidas. Este elemento separador γ é quem garante a existência dos números reais. Além disso, o conjunto dos números reais não pode ser estendido, como diremos mais adiante. Por esse motivo esse teorema é, as vezes, chamado de teorema do completamento dos números reais.

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Deste teorema temos um corolário importante.

Corolário Nas condições do Teorema de Dedekind, ou existe em A, um número máximo, ou, em B, um número mínimo.

A demonstração desses fatos que enunciamos sobre os cortes de Dedekind e números podem ser encontradas em [R].

Como exemplo, o corte que define o número real (irracional) $\sqrt{2}$ pode ser definido como o conjunto dos números racionais p tais que $p^2 < 2$; são as "raízes quadradas de 2 por falta", como

1; 1,1; 1,41; 1,413; 1,4142; ...

Poderíamos ter considerado, também o conjunto dos racionais p tais que $p^2 > 2$, que são as "raízes de 2 por excesso", como

5; 2; 1,5; 1,48; 1,417; 1,4143; ...

Agora que construímos o corpo dos números reais, será que não podemos repetir a mesma construção? Em outras palavras, não seria o caso de considerar o conjunto de todos os cortes de números reais e repetir a postulação de que todo corte deve ter elemento separador, ampliando assim ainda mais o conjunto dos números reais? A resposta é negativa, simplesmente porque demonstra-se que todo corte já tem elemento separador; ou seja, não vai mais acontecer o que acontecia antes com o conjunto dos números racionais, muitos dos quais não tinham elemento separador. Dizemos, pois que o conjunto dos números reais é um corpo completo. Um outro teorema importante que se demonstra é que *qualquer corpo ordenado completo é isomorfo ao corpo dos números reais*. Isto significa que, a menos de isomorfismos, só existe um corpo ordenado completo. A constatação desse fato é, de certo modo, uma decepção; parece que todo o trabalho de construir o corpo dos números reais é inútil. Não seria o caso de tomarmos como ponto de partida a definição de corpo de números reais como sendo um corpo ordenado completo, já que este é o único (a menos de isomorfismos)? Na verdade alguns autores fazem exatamente isso, postulando desde o início a existência de um corpo ordenado completo, o *corpo dos números reais*. Mas é claro que a construção dos números reais a partir dos racionais é importante para provar que, de fato, *existe* um corpo ordenado completo.

Convém observar que esta construção dos números reais que acabamos de descrever é apenas uma das várias que podem ser encontradas na literatura matemática. Georg Cantor, por exemplo, construiu os números reais utilizando as chamadas seqüências de Cauchy; esta construção também encerra muita engenhosidade e pode ser comparada com a de Dedekind por sua beleza. Mas isto é uma outra história.

Os leitores interessados poderão encontrar maiores informações na bibliografia abaixo.

3. Bibliografia

[A1] Ávila, Geraldo; Grandezas Incomensuráveis e Números Irracionais, RPM 5, 1984, SBM.

[A2] Ávila, Geraldo; Eudoxo, Dedekind, Números Reais e Ensino da Matemática, RPM 7, 1985, SBM.

[A3] Ávila, Geraldo; Introdução à Análise Matemática, Editora Edgard Blücher, 1999.

[B] Boyer, Carl B.; História da Matemática, Editora Edgard Blücher, 1974.

[R] Rudin, Walter; Princípios de Análise Matemática, Ao Livro Técnico S.A., 1971.

Mauricio Donizetti Pieterzack
Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Goiânia, GO, Brasil
mauricio@mat.ufg.br

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

O V postulado de Euclides

Romildo da Silva Pina - IME - UFG

Resumo: Apresentamos neste trabalho algumas versões equivalentes ao quinto postulado de Euclides, que surgiram ao longo dos anos, na tentativa de provar que o mesmo poderia ser obtido a partir dos outros quatro primeiros postulados. O quinto postulado desempenhou um papel fundamental para o desenvolvimento da geometria, pois foi questionando a sua veracidade que se descobriram outros modelos de geometria, diferentes da Euclidiana, o que hoje chamamos de geometria não - Euclidiana.

INTRODUÇÃO

A geometria é uma ciência muito antiga. Seus conceitos primitivos são ponto, reta e plano. Conhecimentos geométricos não triviais já eram dominados no Egito antigo, na Babilônia e na Grécia. Na forma como nós a conhecemos, podemos estabelecer o seu ponto inicial na Grécia no tempo de Ptolomeu I, quando Euclides escreveu os Elementos (por volta de 300 a.C).

Euclides e seus predecessores reconheceram o que, nos dias de hoje, todo estudante de filosofia sabe: que não se pode provar tudo. Na construção de uma estrutura lógica, uma ou mais afirmações devem ser admitidas como verdadeiras e a partir delas todas as outras serão então deduzidas.

Desde o tempo de Euclides, o que hoje chamamos de geometria Euclidiana estava totalmente desenvolvida. Os 13 livros, conhecidos como os Elementos é uma compilação da matemática da época, reunindo os teoremas conhecidos, em um único texto, com uma apresentação unificada dos resultados até então conhecidos.

Euclides ficou famoso, pela concepção do livro em si, considerado como primeiro tratado científico, servindo de modelo para vários ramos da ciência, e pela escolha que fez dos axiomas, ou seja, as afirmações que seriam aceitas como verdadeiras.

Os dez axiomas de Euclides foram apresentados em dois grupos: as noções comuns e os postulados. A distinção entre eles não é muito clara. As noções comuns parecem ter sido consideradas como afirmações aceitáveis à todas as ciências, enquanto que os postulados seriam afirmações específicas da geometria.

Os axiomas de Euclides são os seguintes:

Noções Comuns:

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

- 1) Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais.
- 2) Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais.
- 3) Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
- 4) Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais uma à outra.
- 5) O todo é maior do que qualquer uma de suas partes.

Postulados:

- I. Pode-se traçar uma (única) reta ligando quaisquer dois pontos.
- II. Pode-se continuar (de maneira única) qualquer reta finita continuamente em uma reta.
- III. Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e qualquer raio.
- IV. Todos os ângulos retos são iguais.
- V. É verdade que, se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos interiores, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

Na verdade, os enunciados acima apresentados não coincidem exatamente com aqueles apresentados nos Elementos. As alterações que fizemos estão entre parênteses e representam a forma na qual Euclides realmente os utilizou nas provas dos teoremas. Dizemos também que duas retas distintas são paralelas quando não se interceptam, ou seja, não tem ponto em comum.

Os Elementos foi dividido em 13 volumes e contém 465 proposições. Ao escrever os Elementos, Euclides introduziu os postulados um a um, na ordem acima apresentada. Na verdade, o Livro I dos Elementos foi dividido em três partes. As 26 primeiras proposições tratam da teoria elementar dos triângulos. Da proposição 27 à 34 é apresentada a teoria das paralelas e finalmente, na terceira parte, são introduzidas as noções de área de paralelogramos e triângulos que culminam com o teorema de Pitágoras.

O curioso é que Euclides só utiliza o quinto postulado a partir da proposição 29, sendo que as 28 primeiras proposições são provadas usando apenas os quatro primeiros postulados.

Apresentaremos em seguida as proposições 27 e 28 na forma em que foram enunciadas no Livro I dos Elementos (ver [2] e [4]).

Proposição I. 27. *Se uma reta corta duas outras formando ângulos correspondentes iguais como na figura (1), então as duas retas são paralelas.*

Proposição I. 28. *Uma reta corta duas outras formando ângulos como na figura (1). Se $\alpha + \beta$ é igual a dois ângulos retos então as duas retas são paralelas.*

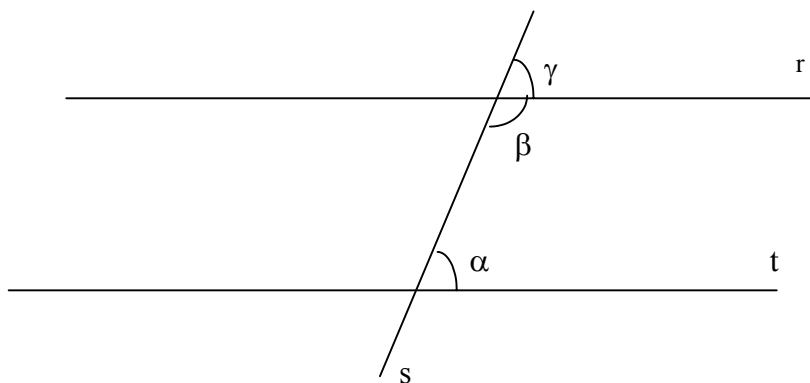


Figura (1)

As demonstrações das proposições acima são feitas sem usar o quinto postulado e podem ser encontradas em [2].

Com a terminologia acima o quinto postulado pode ser reescrito da seguinte forma:

Postulado V. *Uma reta s corta duas outras retas r e t formando ângulos como na figura (1). Se $\alpha + \beta$ for diferente de dois ângulos retos então as duas retas se encontram.*

Na verdade, o quinto postulado está dizendo que, se as retas r e t são paralelas então $\alpha + \beta$ é igual a dois ângulos retos. Observe que o quinto postulado é uma afirmação inversa da proposição I.28. O quinto postulado foi objeto de críticas aos Elementos ainda no tempo de Euclides, até porque ele se apresenta muito diferente dos demais inclusive pelo tamanho do seu enunciado. Devido a estes fatos, desde o início, muitas pessoas o consideraram como uma proposição que Euclides não conseguiu provar. Dois mil anos se passaram ao longo dos quais, inúmeras tentativas foram feitas, tentando provar o quinto postulado usando os quatro primeiros.

Uma das conseqüências da busca por uma prova, foi a produção de um grande número de afirmações a ele equivalentes, o que nós chamamos de substitutos. Primeiro é preciso entender o que significa afirmar que uma proposição (P) é equivalente ao quinto postulado. Significa que a teoria desenvolvida usando os quatro primeiros postulados mais (P) coincide com a geometria de Euclides. Isto é, a geometria baseada nos axiomas e postulados de Euclides. Para provar esta equivalência devemos mostrar que, (P) é uma proposição da geometria Euclidiana. Depois devemos provar que, na

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

teoria desenvolvida usando os quatro primeiros mais (P), pode-se provar o quinto postulado.

Na verdade, é o que acontece hoje. A maioria dos livros de geometria consideram no lugar do quinto postulado uma versão equivalente a ele. Em seguida, apresentaremos algumas versões mais conhecidas do quinto postulado que podem ser encontradas em [1] e [2].

Postulados equivalentes ao quinto postulado de Euclides.

Começaremos com o substituto mais conhecido, que é comumente chamado de axioma de Playfair em homenagem ao geômetra Playfair, que o apresentou em um trabalho em 1795, ver [5] e [6].

Postulado V_1 (Axioma de Playfair) Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.

Em seguida provaremos que V_1 é de fato equivalente ao quinto postulado.

Teorema : O postulado V_1 é equivalente ao quinto postulado de Euclides.

Demonstração: Precisamos provar que V_1 é uma proposição da geometria Euclidiana. Ou seja, provar que dada uma reta m e um ponto p fora de m , existe uma única reta t que passa por p e é paralela a m .

Existência: Traça – se por p uma reta s qualquer formando um ângulo α com a reta m (ver figura 2).

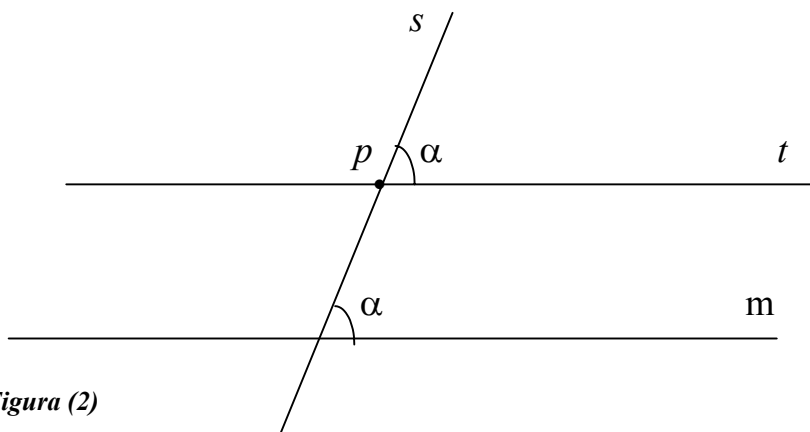


Figura (2)

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Agora trace uma reta t passando por p tal que o ângulo entre t e s seja também α . Portanto, segue pela proposição I.27 que t e m são paralelas pois os ângulos correspondentes são iguais.

Unicidade: Suponha por contradição que exista outra reta t' passando por p e também paralela a m (ver figura 3).

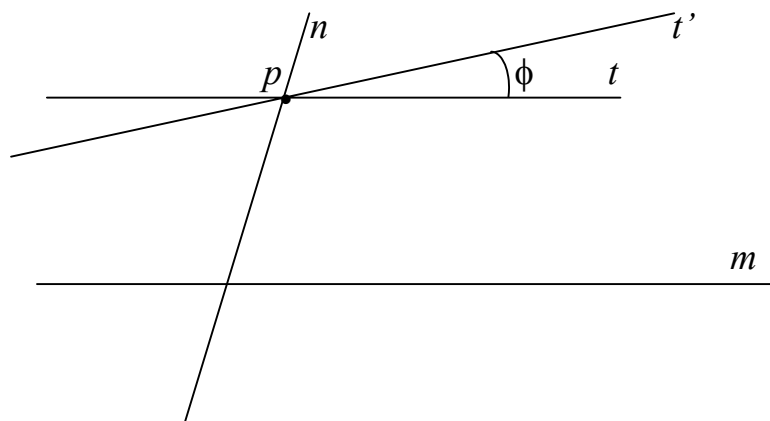


Figura (3).

Traçamos por p uma transversal n às três retas. Como t e t' são paralelas à reta m , segue pelo postulado V que t e t' formam o mesmo ângulo com a reta n e consequentemente o ângulo formado pelas retas t e t' é zero. Portanto são coincidentes, provando assim a unicidade.

Vamos agora considerar os quatro primeiros postulados de Euclides e mais (V_I) e provar o quinto postulado.

Fazendo uso da figura (4) abaixo suponha que $\alpha + \beta$ é menor do que dois retos. Provaremos que m e t se encontram.

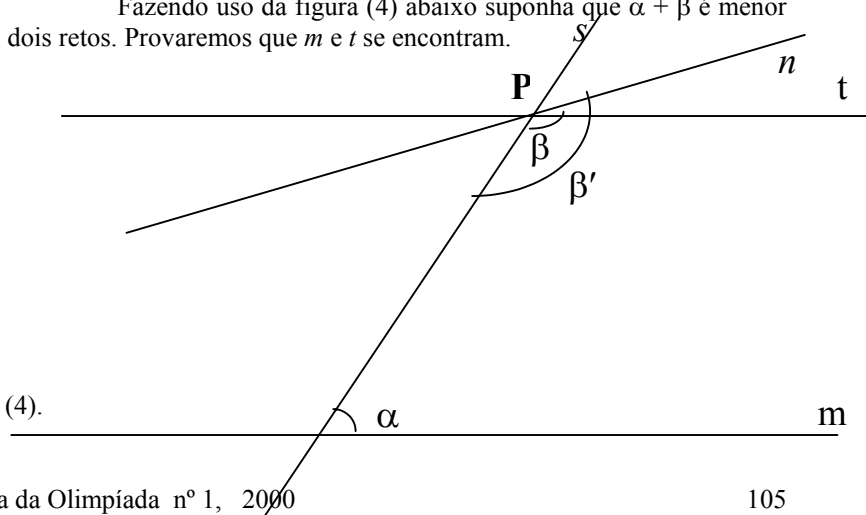


Figura (4).

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Suponha por contradição que as retas m e t são paralelas. Traçamos pelo ponto P uma reta n formando um ângulo β' com a reta s tal que $\alpha + \beta'$ seja igual a dois ângulos retos. Segue pela Proposição I.28 que n e m são paralelas. Neste caso, temos duas retas distintas passando pelo ponto P e paralelas à reta m . Isso contraria V_1 . Logo, as retas r e s se encontram. Portanto, podemos concluir que V_1 é equivalente ao quinto postulado.

Apresentaremos agora mais seis versões equivalentes ao quinto postulado. A justificativa de que realmente são equivalentes é deixada para o leitor e podem ser encontradas em [2].

Postulado V_2 . *A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a dois ângulos retos.*

Postulado V_3 . *Existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes.*

Postulado V_4 . *Existe um par de retas eqüidistantes.*

Postulado V_5 . *Dados quaisquer três pontos não colineares, existe um círculo passando por estes três pontos.*

Postulado V_6 . *Se três dos ângulos de um quadrilátero são retos, então o último também é reto.*

Postulado V_7 . *Por qualquer ponto dentro de um ângulo menor do que dois terços de um ângulo reto, pode-se traçar uma reta que corta os dois lados do ângulo.*

Estes substitutos do quinto postulado, além da importância, servem para mostrar a não trivialidade do mesmo na Geometria Euclidiana. Suas conseqüências incluem as proposições mais conhecidas e mais utilizadas da Geometria. Sem ele ou um de seus equivalentes não teríamos o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo e toda a teoria dos triângulos semelhantes e consequentemente a trigonometria deixaria de existir.

Ao longo dos séculos, desde a época de Euclides, muitos matemáticos tentaram obter o quinto postulado como uma conseqüência dos quatro primeiros. Algumas tentativas ficaram famosas entre elas as de Nasiradin (1201 – 1274), John Wallis (1616 – 1703), Gerolamo Saccheri (1667 – 1733), John H. Lambert (1728 – 1777), Adrien M. Legendre (1752 – 1833), Louis Bertrand (1731 – 1812) e Carl F. Gauss (1777 – 1855) [3].

O erro mais comum dos matemáticos que buscavam provar o quinto postulado, era que no decorrer da prova eles usavam resultados que eram equivalentes ao próprio quinto postulado. Esta questão é altamente fascinante pois ainda no século XIX, os matemáticos estavam na busca de uma prova para o quinto postulado. Nos anos críticos para a evolução da geometria, a figura dominante do mundo matemático era Carl F. Gauss. Poucos dos resultados de seus muitos anos de pesquisa sobre os problemas associados ao quinto postulado foram publicados ou tornados públicos durante sua vida. Algumas

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

notas descobertas entre seus trabalhos levam a crer que ele foi provavelmente o primeiro a entender claramente a possibilidade de existir uma nova geometria, logicamente precisa e diferente da geometria Euclidiana. Resumindo, somente nesta época é que ficou claro que era impossível provar o quinto postulado a partir dos quatro primeiros postulados de Euclides, pois se juntarmos a negação do mesmo com os quatro primeiros surge uma geometria tão consistente quanto a de Euclides. É o que hoje nós chamamos de geometria não-Euclidiana. Entretanto, os esforços feitos para provar o quinto postulado não foram em vão; serviram para obter um conhecimento profundo da geometria Euclidiana. Na verdade, quando Euclides escreveu os Elementos ele usou hipóteses que não foram mencionadas na lista inicial dos dez axiomas. Mas devido a grandeza de seu trabalho, estas falhas não ofuscaram o brilho de sua obra. Um tratamento moderno e logicamente perfeito para a geometria Euclidiana, corrigindo as imperfeições dos Elementos, foi feito por D. Hilbert em 1899 (ver [7]).

Para finalizar, apresentaremos um modelo de uma geometria não – Euclidiana, ou seja, um modelo onde o quinto postulado de Euclides não é válido. O modelo que será apresentado é conhecido como modelo de Klein.

Modelo de Klein

Considere uma circunferência C no plano Euclidiano de centro O e raio R . O modelo de Klein é formado por todos os pontos interiores a C , ou seja, por todos os pontos X tais que $OX < OR$. As retas deste modelo são todos os segmentos ligando dois pontos da circunferência C , sem as extremidades. Ver figura (5).

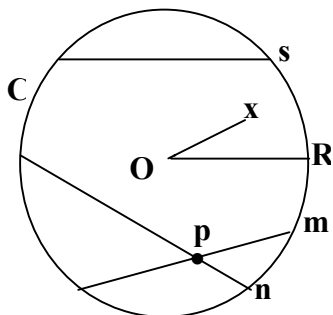


Figura (5)

Neste modelo o quinto postulado de Euclides não é válido pois, basta olhar para a figura (5) e ver que podemos traçar infinitas retas passando por P e paralelas à reta s , lembrando que retas paralelas, conforme definimos anteriormente, são retas que não tem nenhum ponto em comum.

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

A demonstração de que o modelo de Klein satisfaz axiomas equivalentes aos quatro primeiros postulados de Euclides não será feita aqui e pode ser encontrada em [5].

Referências

- [1] Barbosa, João L. M. Geometria Euclidiana Plana, SBM, Rio de Janeiro, 1985.
- [2] Barbosa, João L. M. Geometria hiperbólica, IX Escola de Geometria Diferencial, Vitória – ES, 1994.
- [3] Boyer, C., História da Matemática, Ed. Edgar Blucher, São Paulo – SP, 1976.
- [4] Euclid, The Elements, Dover Publications, N. Y., 1956.
- [5] Greenberg, M. J., Euclidean and non-euclidean geometries - development and history, W. H. Freeman and Co. , S. Francisco, 1973.
- [6] Hartshorne, R., Companion to Euclid, Lecture Notes vol. 9, Berkeley Mathematics (MAS), 1997.
- [7] Hilbert, D., The foundations of Geometry, traduzido por E.J. Townsend, The Open Court Publishing Co, Chicago 1902.

Romildo da Silva Pina
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
Goiânia, GO, Brasil
romildo@mat.ufg.br