UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIAS
ESCOLA DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

ANALISE DA INFLUÊNCIA DA NÃO LINEARIDADE FÍSICA NO COMPORTAMENTO NÃO LINEAR ESTÁTICO DE TRELIÇAS ESPACIAIS

VICTOR MARIANO MACIEL

GOIÂNIA
2016

VICTOR MARIANO MACIEL

ANALISE DA INFLUÊNCIA DA NÃO LINEARIDADE FÍSICA NO COMPORTAMENTO NÃO LINEAR ESTÁTICO DE TRELIÇAS ESPACIAIS

Monografia apresentada ao Curso de Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Goiás para aprovação na disciplina Trabalho de Conclusão de Curso 2.

Orientador: D.Sc. Frederico Martins Alves da Silva

GOIÂNIA

2016

VICTOR MARIANO MACIEL

ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DA NÃO LINEARIDADE FISICA NO COMPORTAMENTO NÃO LINEAR ESTÁTICO DE TRELIÇAS ESPACIAIS

Monografia apresentada no Trabalho de Conclusão de Curso 2 do Curso de Graduação em Engenharia Civil ou Engenharia Ambiental e Sanitária da Universidade Federal de Goiás.

Aprovado em: 08 / 12 / 2016 .

Banca Examinadora:

_____

Prof. Dr. Frederico M A Silva– EECA-UFG (Orientador)

Renata Soares

Prof. Dr. Renata Machado Soares– EECA-UFG

_____

Prof. Dr. Zenón José Guzmán Nuñez Del Prado– EECA-UFG

Atesto que as revisões solicitadas foram feitas:

_____

Prof. Dr. Frederico M A Silva (orientador)

Em: 08 / 12 / 2016

RESUMO

Este trabalho aborda o efeito da não linearidade geométrica e física no comportamento não linear de treliças espaciais que são utilizadas nos mais diversos tipos de construções. Nesse modelo estrutural é comum respostas altamente não lineares devido à aplicação, mesmo que baixa, de cargas dinâmicas e estáticas por conta da não linearidade física e geométrica presente no modelo estrutural. Fenômenos não lineares estão abordados na revisão bibliográfica, assim como a instabilidade estrutural e critérios para a análise. Por meio de um *software* comercial de elementos finitos (MEF), Ansys®, são analisados experimentos numéricos para se obter os caminhos de equilíbrio, diagramas de bifurcação, pontos críticos, identificando fenômenos de perda de estabilidade como o *snap-back* e o *snap-throught*, que por sua vez serão obtidos comparados com resultados da literatura. Inicialmente é feito uma análise estática elástica, para verificar a aplicabilidade do *software*, e em seguida será inserido um modelo constitutivo para material com propriedades dependentes do nível de deformação presente na estrutura.

Palavras chave: Treliça espacial. Estabilidade. Método dos Elementos Finitos. *Snap-back*. *Snap-throught*. Não linearidade geométrica. Não linearidade física.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Aplicações de treliças espaciais: (a) ponte treliçada (b) torre de transmissão de energia (c) plataforma *offshore* (d) telhado metálico treliçado 10

Figura 1.2 - Classificação das posições de equilíbrio em um problema de análise de estabilidade. Fonte: adaptado pelo autor 12

Figura 1.3 - Esferas de massas *M1* e *M2* quando sofrem pequena variação em sua posição de equilíbrio. Fonte: adaptado pelo autor 12

Figura 1.4 - Tipos de leis constitutivas. Fonte: adaptado pelo autor 13

Figura 2.1 –Trajetórias de equilíbrio típicas para os sistemas treliçados (a) *snap-throught* (b) *snap-back* (c) bifurcação. Fonte: Lacerda (2014) 20

Figura 2.2 – Sistema mecânico para análise da bifurcação estável (a) barra na configuração indeslocada (b) barra na configuração deslocada 21

Figura 2.3 – (a) caminhos de equilíbrio para bifurcação simétrica estável (b) variação de energia potencial para diferentes níveis de carregamento para o caso da bifurcação estável. Fonte: Gonçalves (1993) 22

Figura 2.4 – Bifurcação simétrica estável com imperfeição geométrica (a) sistema mecânico (b) caminhos de equilíbrio. 23

Figura 2.5 – (a) sistema mecânico indeformado para verificar a bifurcação simétrica instável (b) sistema mecânico deslocado (c) variação de energia potencial para diferentes níveis de carregamento para o caso da bifurcação instável. Fonte: Gonçalves (1993) 24

Figura 2.6 – (a) caminhos de equilíbrio com imperfeição geométrica para o caso da bifurcação simétrica instável (b) cargas limites *versus* imperfeições geométricas. Fonte: Gonçalves (1993) 24

Figura 2.7 – (a) sistema mecânico para o modelo da bifurcação assimétrica (b) variação de energia potencial para diferentes níveis de carregamento para o modelo de bifurcação assimétrica. Fonte: Gonçalves (1993) 25

Figura 2.8 – (a) Bifurcação homoclínica (b) bifurcação heteroclínica..... 26

Figura 3.1 – Descrição do elemento finito (a) LINK 180 (b) BEAM 188. Fonte: Ansys®..... 28

Figura 3.2 – Local de inserção da não linearidade física do material no Ansys® 29

Figura 3.3 – (a) - Geometria da treliça plana (b) - lei constitutiva do material. Fonte: Greco *et al.*(2006) 30

Figura 3.4 – Relação de carga *versus* deslocamento vertical central 30

Figura 3.5 – (a) Carga *versus* deslocamentos para diferentes estágios de carga/descarga (b) dados de carregamento aplicados no nó central 31

Figura 3.6 – Treliça Domo reticulado de 24 elementos (a) planta do domo (b) dados da geometria. Fonte: Greco *et al.*(2006) 32

Figura 3.7 – Lei constitutiva do modelo não linear isotrópico bilinear do tipo *hardening mises* .. 33

Figura 3.8 – Relação de carga *versus* deslocamento vertical central 34

Figura 3.9 – Relação de carga *versus* deslocamento vertical para um intervalo maior..... 34

Figura 3.10 – Variação quanto a área (a) - relações entre deslocamento versus carga para uma resposta linear (b) - relação entre deslocamento versus carga considerando a não linearidade geométrica (c) - relação entre deslocamento versus carga considerando a não linearidade física. 35

Figura 3.11 –Relação entre a área e a carga limite antes do primeiro *snap-through* 36

Figura 3.12 –Relação entre a carga aplicada *versus* o deslocamento vertical no nó central considerando a variação da tensão de escoamento..... 37

Figura 3.13 –Relação entre a tensão plástica e a carga limite antes do primeiro *snap-through*..... 37

Figura 3.14 – Treliça espacial de 12 barras. Fonte: Pinheiro (2003)..... 38

Figura 3.15 – Relações não lineares entre os deslocamentos (a) - deslocamento horizontal *u* *versus* deslocamento vertical *w* (b) deslocamento vertical *v versus* deslocamento horizontal *u* (c) deslocamento vertical *v versus* deslocamento vertical *w* 39

Figura 3.16 – Relações não lineares entre a carga *F* e os deslocamentos (a) - deslocamento vertical v *versus* F(b) deslocamento horizontal *u versus F* (c) deslocamento vertical *w versus F*. 40

Figura 3.17 – Relações não lineares entre os deslocamentos considerando a plasticidade (a) - deslocamento horizontal *u* versus deslocamento vertical *w*(b) deslocamento vertical *v* versus deslocamento horizontal *u* (c) deslocamento vertical *v* versus deslocamento vertical *w* (d) legenda referente aos gráficos 41

Figura 3.18 – Lei constitutiva do modelo não linear isotrópico bilinear do tipo *hardening mises* 42

Figura 3.19 –Geometria da treliça plana de 2 elementos. Fonte: Wang, Blandford e Hill (1988). 43

Figura 3.20 – Carregamento versus deslocamento vertical do nó central da treliça plana de duas barras 43

Figura 3.21 – Lei constitutiva do material (a) bilinear (b) multilinear..... 44

Figura 3.22 - Relação entre a aplicação da carga versus o deslocamento vertical do nó central considerando a plasticidade inserida de forma bilinear com módulo de elasticidade nulo após a tensão de escoamento 45

igura 3.23 - Relação entre a aplicação da carga versus o deslocamento vertical do nó central considerando a plasticidade inserida de forma multilinear 45

Figura 3.24 – Geometria e dados de construção da estrutura treliçada: (a) planta, (b) perfil e (c) vista isométrica..... 46

Figura 3.25 – Relação entre carga e deslocamento vertical no nó central..... 47

Figura 3.26 – Relação entre carga e deslocamento vertical no nó central..... 48

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO 10

1.1 -JUSTIFICATIVA 14

1.2 - OBJETIVOS 14

1.3 -OBJETIVOS ESPECÍFICOS 14

CAPÍTULO 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 15

2.1. ESTABILIDADE ESTRUTURAL 15

2.2. CRITÉRIO DE ESTABILIDADE ESTÁTICA 18

2.3. NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA E FÍSICA 19

2.4. CAMINHOS DE EQUILÍBRIO 20

2.5. COMPORTAMENTO NÃO LINEAR DE SISTEMAS MECÂNICOS 21

2.5.1 BIFURCAÇÃO SIMÉTRICA ESTÁVEL E INSTÁVEL 21

2.5.2. BIFURCAÇÃO ASSIMÉTRICA 25

2.5.3. BIFURCAÇAO SIMÉTRICA GLOBAL 25

CAPÍTULO 3 - METODOLOGIA E RESULTADOS NUMÉRICOS 27

3.1 - METODOLOGIA 27

3.2 - RESULTADOS NUMÉRICOS 29

3.2.1 - TRELIÇA PLANA DE TRÊS ELEMENTOS 29

3.2.2 - DOMO TRELIÇADODE 24 ELEMENTOS 32

3.2.3 -TRELIÇA ESPACIAL DE 12 BARRAS 37

3.2.4 - TRELIÇA PLANA DE DOIS ELEMENTOS 42

3.4.5 - TRELIÇA ESPACIAL ABATIDADE 16 ELEMENTOS 45

CONCLUSÕES 49

REFERÊNCIAS 51

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Treliças espaciais são amplamente utilizadas em diversas áreas das engenharias civil, naval, petroquímica, aeronáutica e mecânica. Construções, tais como: edifícios, pontes, plataformas *offshore* e torres de transmissão de energia são exemplos de possíveis aplicações. Sua larga utilização se deve à grande capacidade de resistência a cargas pelos elementos reticulados e o baixo peso próprio do sistema se comparado a outros sistemas estruturais que exerçam a mesma função. Ilustrações da utilização de treliças espaciais em construções são apresentadas na Figura 1.1.

Figura 1.1 – Aplicações de treliças espaciais: (a) ponte treliçada (b) torre de transmissão de energia (c) plataforma *offshore* (d) telhado metálico treliçado

Fonte: http://construcaomassa.blogspot.com.br/

Acesso em 21/11/2016

(a)

Fonte: http://wwwo.metalica.com.br/torre-de-transmissao-de-energia

Acesso em 21/11/2016

(b)

Fonte: https://petrogasnews.wordpress.com/

Acesso em 21/11/2016

(c)

Fonte: http://www.spcom.eng.br/obras-cervejaria_petropolis.htm

Acesso em 25/11/2016

(d)

A concepção do arranjo de barras de uma treliça deve ser triangular para que esta seja minimamente estável, pois qualquer deslocamento nodal resultará em uma deformação nos elementos para este arranjo. Configurações diferentes dos arranjos não proporcionará travamento dos nós, não obtendo, portanto, um arranjo estável.

As estruturas atuais trazem uma maior racionalização de materiais, buscando-se uma maior esbeltez da estrutura. Aliado ao surgimento de formas cada vez mais complexas e irregulares, cuja previsão dos deslocamentos estruturais devido ao regime de cargas estáticas, ou dinâmicas, são mais difíceis de serem previsto, o estudo da estabilidade estrutural se faz necessário para se obter resultados com uma maior fidelidade do projeto ao modelo físico real além de se avaliar fenômenos de perda de estabilidade que são característicos de sistemas estruturais não lineares tais como – perda de estabilidade por ponto limite, ressonância interna e vibrações excessivas – que podem comprometer a utilização da treliça ou levá-la a ruína.

Para avaliar a estabilidade de um sistema estrutural, conhecendo o seu comportamento e possíveis fenômenos de instabilidade do sistema estrutural, deve-se verificar a configuração de equilíbrio do sistema com a variação de um determinado parâmetro de controle, tal como o carregamento externo, obtendo, dessa forma, um caminho de equilíbrio ou trajetória de equilíbrio.

Além de se conhecer a trajetória de equilíbrio do sistema estrutural, o equilíbrio, por sua vez, deve ser classificado em um dos três estados: estável, instável e indiferente, que podem ser ilustrados a partir de um esquema clássico de três massas (*M*) repousando em curvas e retas, como apresenta a Figura 1.2. O comportamento da esfera, em uma das configurações apresentadas na Figura 1.2, ao ser perturbada por um agente externo fornece a classificação de equilíbrio da configuração inicial, a saber: se a esfera voltar à posição inicial, o ponto é classificado como estável; se a esfera se distanciar do ponto inicial o equilíbrio é denominado instável; e caso a esfera se acomodar a qualquer nova posição a denominação é indiferente (GONÇALVES, 1993; LACERDA, 2014).

Essa classificação da estabilidade de um ponto da Figura 1.2 se dá ao observar a variação de energia potencial da massa (*M*). Verifica-se que a primeira esfera de massa *M1* ao sofrer uma pequena perturbação e ser deslocada do fundo do vale apresentará uma variação positiva de energia, cuja resultante de forças trará a esfera à sua posição de equilíbrio original – $\Delta\Pi > 0$, como mostra a Figura 1.3(a). A esfera de massa *M2* após sofrer uma pequena perturbação, a resultante de forças distanciará a esfera de sua posição original, tendo uma variação da energia potencial negativa $\Delta\Pi < 0$, como ilustrado na Figura 1.3(b). Por sua vez, a esfera *M3* da Figura

1.2 para qualquer perturbação externa imposta, tem-se uma configuração de equilíbrio indiferente, pois a variação da energia potencial é nula, $\Delta\Pi=0$.

Figura 1.2 - Classificação das posições de equilíbrio em um problema de análise de estabilidade. Fonte: adaptado pelo autor

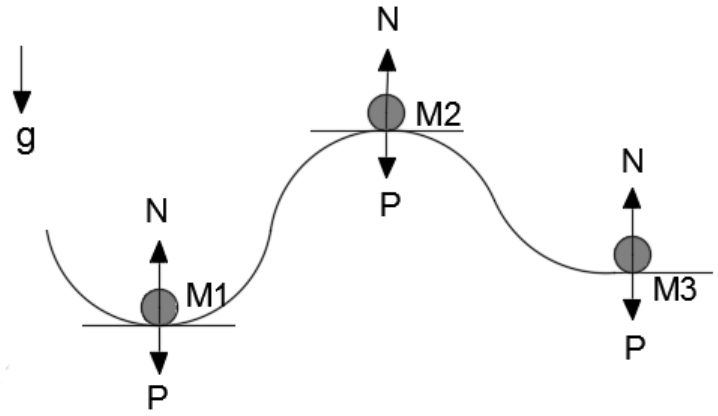
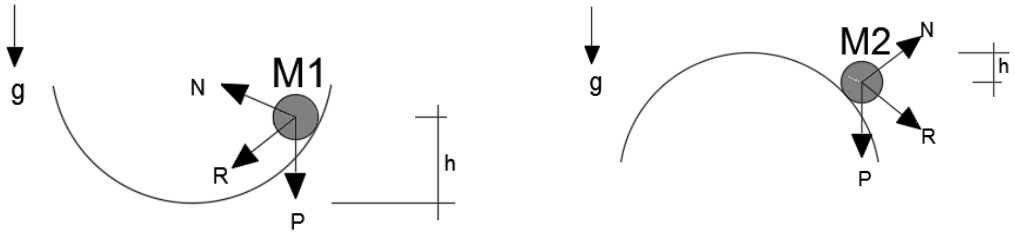


Figura 1.3 - Esferas de massas *M1* e *M2* quando sofrem pequena variação em sua posição de equilíbrio. Fonte: adaptado pelo autor



(a) Estável $\Delta\Pi = P\ h > 0$ (b) Instável $\Delta\Pi = P\ h < 0$

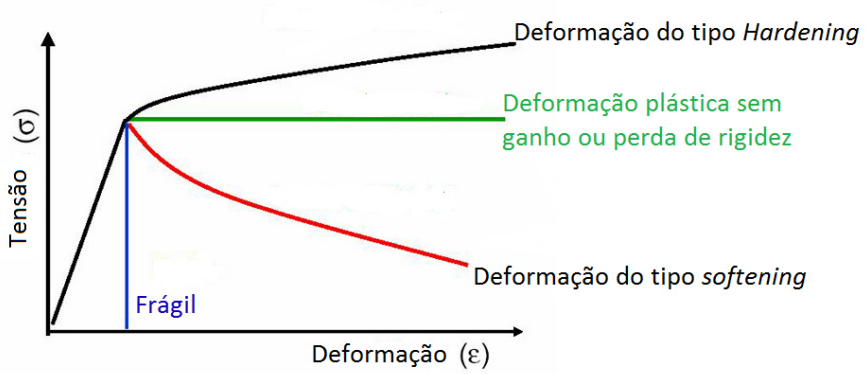
Ao longo do caminho de equilíbrio as configurações de equilíbrio podem sofrer uma mudança qualitativa. Denomina-se, quando o tipo de equilíbrio muda a partir de uma variação do parâmetro, como ponto crítico ou como ponto limite, o estado de sistema que separa duas regiões de comportamentos distintos. Essa mudança pode ocorrer por meio de pontos de bifurcação – pontos de mudança brusca na trajetória de equilíbrio inicial, modificando sensivelmente a

resposta. Os fenômenos *snap-throught* e *snap-back* são fenômenos de perda de estabilidade por ponto limite encontrados ao longo do caminho de equilíbrio de treliças planas ou espaciais.

É importante dissertar sobre os tipos de não linearidade que serão abordadas neste trabalho. A não linearidade geométrica, ocorre devido a geometria, que pode sofrer grandes deslocamentos e grandes deformações, alterando, assim, as equações de equilíbrio iniciais. Caso apenas as equações lineares de equilíbrio sejam consideradas, elas não são capazes de fornecer resultados satisfatórios para a análise da trajetória de equilíbrio do problema proposto neste trabalho, visto que para treliças espaciais o caminho de equilíbrio tem características não lineares.

Por sua vez, a não linearidade física é resultado de um comportamento não linear do material. Há uma série de tipos de não linearidades dos materiais. No presente trabalho abordam-se materiais com a lei constitutiva do modelo não linear isotrópico bilinear e multilinear. O modelo bilinear possui um patamar de escoamento linear e o multilinear é construído a partir das relações de tensão *versus* deformação do material. A partir da tensão de escoamento podem ocorrer deformações do tipo *hardening* em que ocorre ganho de rigidez, deformações do tipo *softening* em que ocorre perda de rigidez e deformações que a tensão de escoamento se permanece constante rompendo sem necessitar nenhum acréscimo de tensão. A Figura 1.4 ilustra os tipos de deformações existente para um material comum.

Figura 1.4 - Tipos de leis constitutivas. Fonte: adaptado pelo autor



Utiliza-se, geralmente, o modelo linear elástico para descrever o comportamento do material em análises estruturais, esta simplificação fornece um conjunto de formulações e equações de fácil solução se comparado aos modelos de cálculo estrutural que consideram a não linearidade física. A aplicação da não linearidade física nas análises estruturais tem sido largamente empregada principalmente à melhorias no campo de implementações computacionais e popularização de

métodos numéricos para a análise estrutural como o método dos elementos finitos, pois a solução do sistema de equações não lineares de equilíbrio do problema requerem soluções iterativas e técnicas de solução numéricas apropriadas.

A solução não linear, geométrica e física, de treliças espaciais pode ser obtida por meio da análise por elementos finitos (MEF). A formulação pode ser descrita usando o posicionamento nodal, ou o deslocamento nodal, para descrever o problema. Para a solução do sistema de equações não lineares de equilíbrio, discretizadas a partir do método dos elementos finitos, utiliza-se de métodos numéricos como por exemplo o método de Newton-Raphson associado ao método do comprimento de arco para que a análise incremental iterativa seja possível.

1.1 -JUSTIFICATIVA

O estudo da não linearidade física de treliças espaciais, identificando fenômenos associados as trajetórias de equilíbrio não lineares, permitem obter um resultado mais realista de sistemas estruturais que são largamente utilizadas nos mais diversos tipos de construções, contribuindo para que ocorra um melhor entendimento do processo de perda de instabilidade e fornecendo ferramentas úteis à análise de outros tipos de estruturas compostas pelo mesmo sistema estrutural abordado neste trabalho.

1.2 - OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho é avaliar a influência da lei constitutiva do material nos caminhos de equilíbrio de treliças espaciais, estabelecendo limites máximos de carregamento que garantam a segurança desse sistema estrutural.

1.3 -OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Analisar por meio do método dos elementos finitos (MEF), com o auxílio de um *software* comercial, exemplos de treliças espaciais, verificando fenômenos não lineares como pontos de limites de carregamento, *snap-through* e *snap-back*, realizando, para isto, uma vasta análise paramétrica da geometria, do carregamento aplicado e da lei constitutiva do material da treliça.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O comportamento não linear e o estudo da estabilidade de treliças espaciais tem sido de interesse de muitos pesquisadores, pois há, cada vez mais, construções que se utilizam deste sistema estrutural. Soma-se a isto uma maior racionalização dos elementos estruturais que compõem as treliças espaciais, criando elementos cada vez mais esbeltos os quais estão sujeitos a uma maior intensidade de efeitos não lineares, que podem provocar a perda de estabilidade da estrutura antes de se atingir a carga de ruptura do material.

Este capítulo abordará alguns dos conceitos fundamentais para o entendimento do trabalho. Aborda-se o conceito de estabilidade estrutural, na primeira seção. A segunda seção descreve o critério de estabilidade estática. Já trabalhos que versam sobre a não linearidade geométrica e física e sobre caminhos pós-críticos são tratados, respectivamente, na terceira e na quarta seção deste capítulo. E, por fim, aborda-se, na quinta seção, diferentes modelos de comportamento pós-crítico, identificando os tipos de bifurcações estáticas e a perda de estabilidade por ponto limite, esse último caso é característicos de treliças planas ou espaciais.

2.1. ESTABILIDADE ESTRUTURAL

A perda de estabilidade é um fenômeno intrinsecamente não linear, desse modo para se obter com fidelidade o comportamento do sistema estrutural deve-se fazer uma análise não linear. Embora uma linearização das equações que descrevem o sistema em torno de uma configuração de equilíbrio pode ser utilizada para facilitar a análise, as informações sobre o comportamento pós-crítico são perdidas com essa linearização (GONÇALVES, 1993).

Na análise da mecânica estrutural têm-se, além do equilíbrio estável, outros tipos de equilíbrio, a saber: equilíbrio instável e equilíbrio indiferente. A classificação e o estudo da mudança do tipo de equilíbrio quando se varia um dado parâmetro é o objeto da teoria da estabilidade estrutural (GONÇALVES, 1993).

Em ruínas causadas pela ruptura de material a carga é governada pela resistência do próprio material, e esta não possui dependência da geometria da estrutura. A carga limite em ruína por instabilidade estrutural pode ser completamente independente da resistência do material. A causa da instabilidade tem como fator a forma da geometria estrutural, e com atenção à esbeltez da estrutura, a qual amplifica a chance de colapso por instabilidade (BAŽANT; CEDOLIN, 2010).

Em 1744, Euler propõe parte da solução para a flambagem de colunas comprimidas. Euler conceitua carga crítica, a qual se refere a um valor onde há uma mudança no comportamento de forma qualitativa da coluna. Vários casos de colunas carregadas com diferentes condições de contorno foram solucionados por Euler (BAŽANT, 2000) e é considerado o mais simples fenômeno de instabilidade estrutural, sendo o caso inicial de estudo na área de estabilidade estrutural (GERE; TIMOSHENKO, 1990).

Nas engenharias civil, mecânica e aeroespacial, por exemplo, o estudo da perda de estabilidade de treliças é de grande importância. Nesses sistemas estruturais, a flambagem global implica em flambagem dos seus elementos individualmente, desse modo as soluções de flambagem de colunas se aplicam aos elementos de uma treliça. O comportamento não linear de toda a estrutura é a principal dificuldade apontada, pois a carga axial de um elemento influencia não apenas sua carga crítica, mas também a carga de todos elementos adjacentes. Subestima-se, geralmente, essa verificação, devido a sua dificuldade, o que leva a erros graves na análise estrutural (BAŽANT; CEDOLIN, 2010).

Vários são os trabalhos que se destacam na análise não linear de treliças espaciais e planas, como os de Yang e Kuo (1994), Papadrakakis (1981), Forde e Stiemer (1987), Crisfield (1991; 1997), Shi (1994), Krenk e Hededal (1995), Krishnamoorthy *et al*. (1996), Oñate e Matias (1996) e Pinheiro (2003). Nestes trabalhos, os exemplos abordados apresentam os caminhos de equilíbrio não lineares com inúmeros *snap-back* e *snap-through*.

Greco e Venturini (2006) e Lacerda (2014) apresentam uma alternativa de análise de estabilidade estrutural de treliças, baseada no método dos elementos finitos. Alguns exemplos numéricos encontrados na literatura são estudados, onde se identificam as cargas críticas, os pontos limites e os caminhos de equilíbrio através da relação da carga aplicada pelo deslocamento nodal. Pinheiro e Silveira (2004) analisam o comportamento de um domo reticulados de 168 elementos e uma treliça espacial de 12 barras, considerando apenas a não linearidade geométrica, obtendo as trajetórias de equilíbrio não linear do sistema estrutural.

A estrutura de uma treliça pode sofrer grandes alterações na geometria, apresentando, desta forma, pontos críticos com uma resposta não linear apresentando *snap-through ou snap-back* durante um colapso estático (HINDRA, 2010).

Snap-through e *snap-back* são fenômenos de perda de estabilidade que representam alguns dos problemas mais difíceis em uma análise não linear estrutural. Para a maioria dos problemas práticos, é completamente desnecessário obter esses comportamentos. Alguns procedimentos de análise mais simplificado para avaliar esses fenômenos envolvem o uso de molas fictícias, ou adotar alguma forma de controle de deslocamento. Entretanto a principal desvantagem do primeiro método é a tentativa e o erro envolvido na seleção adequadas das molas Já no segundo método há uma dificuldade quanto a seleção da variável de deslocamento adequado: a necessidade de alterar a variável de deslocamento foi notada devido a uma lenta convergência ou divergência do processo da solução iterativa (CRISFIELD, 1981).

As estruturas treliçadas que apresentam não linearidade geométrica são demonstradas usando uma abordagem de comprimento de arco dentro de uma análise de elemento finito para obter os caminhos de equilíbrio (HINDRA, 2010).

O estudo da flambagem local, a subsequente transferência de carga e a resposta estrutural global de um sistema geometricamente perfeito, assim como estruturas com imperfeição, são estudadas por Kondon e Atluri (1984).

Estruturas de treliça que incluem cabos tensionados são analisadas por meio da aplicação de técnicas de elementos finitos. A influência das propriedades do cabo e pretensão nas treliças,a variação da tensão do cabo em configuração não deformada e deformada são abordadas por Liao e Du (2010), onde os autores apresentam estudos de caso de estruturas do tipo cabo-treliça a partir da utilização de *softwares* comerciais como o ANSYS e o NASTRAN.

Uma análise não linear elástica de estruturas treliçadas foi obtida por Kim e Thai (2011), avaliando vários modos de falha de membros, como flambagem, assim como respostas de descarga e recarga. Respostas não-lineares de estruturas treliçadas espaciais sob cargas sísmicas também foram abordadas por Kim e Thai (2011). Análises estáticas não lineares também foram pesquisadas extensivamente por autores como Papadrakakis (1983), Atluri e Kondon (1985). Usualmente o modelo de treliça não considera a inércia transversal da seção transversal e, portanto, não é possível obter a flambagem localizada. Todavia, quando se considera a inércia transversal o caminho de equilíbrio e a carga crítica podem se alterar. No presente trabalho será

abordado, em um dos exemplos numéricos, a inércia transversal dos elementos estruturais com o intuito de conferir as principais diferenças numéricas na trajetória de equilíbrio da treliça.

2.2. CRITÉRIO DE ESTABILIDADE ESTÁTICA

Na literatura há três critérios que são utilizados, usualmente, para a determinação da estabilidade estática de um sistema elástico conservativo. Os critérios empregados para a determinação da estabilidade dos caminhos de equilíbrio de sistemas mecânicos sujeitos a cargas estáticas são: *estático*, *dinâmico* e *energético*. Todos partem de uma pequena perturbação do sistema original, analisando a resposta da estrutura ao longo do tempo. O sistema pode ser considerado conservativo, visto que a perturbação é muito pequena e não há perda de energia ao longo do tempo (CROLL; WALKER, 1972; GONÇALVES, 1993).

O primeiro critério para investigar a estabilidade estrutural, *estático*, é considerado de mais fácil entendimento. Escreve-se as equações de equilíbrio estático para o sistema sujeito a uma pequena perturbação em torno do estado original de equilíbrio e verifica-se se as forças resultantes tendem, ou não, a restaurar o sistema a seu estado original de equilíbrio. Caso a força resultante tende a restaurar o sistema à posição original, o equilíbrio é estável. De outra maneira, se a força resultante afastar o sistema da posição original, o equilíbrio é instável. Se, todavia, o sistema permanecer na posição perturbada, o equilíbrio é tido como neutro (CROLL; WALKER, 1972; GONÇALVES, 1993).

O segundo critério para investigar a estabilidade estrutural, *dinâmico*, analisa o comportamento das oscilações do sistema perturbado. As frequências naturais de vibração do sistema estrutural são verificadas e caso todas elas sejam reais e não nulas, têm-se um equilíbrio estável; se alguma das frequências for imaginária, o equilíbrio é tido como instável; e, se alguma das frequências forem nulas, têm-se um estado crítico. As frequências naturais são as raízes do problema de autovalor do sistema linearizado em torno de uma posição de equilíbrio do sistema (CROLL; WALKER, 1972).

O terceiro critério para investigar a estabilidade estrutural é o *energético*. Em termos de energia, verifica-se que o comportamento do sistema estático depende apenas da energia potencial total do sistema. Lagrange demonstrou que uma condição suficiente para a estabilidade de um sistema conservativo é que sua energia potencial tenha um mínimo estrito neste ponto. Se o incremento de energia potencial devido a um campo de deslocamentos suficientemente pequeno e

cinematicamente admissível for positivo definido, o equilíbrio é estável. Se for negativo, é instável. Se for nulo, é um estado crítico (GONÇALVES, 1993).

2.3. NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA E FÍSICA

Considerar apenas o comportamento linear de treliças, leva-se à criação de membros muito esbeltos que, em contrapartida, tornam-se perigoso, pois estes tornam-se susceptíveis a várias vulnerabilidades não-lineares geométricas como, por exemplo,o *snap-through*. Assim, pode-se argumentar que a avaliação da segurança estrutural destas estruturas só pode ser adequadamente alcançada se todo os fenômenos não lineares relevantes são levados em conta na análise estrutural (BARRIGÓ, 2014).

A não linearidade geométrica é quando ocorre a perda da linearidade entre as relações de deslocamento e deformação, levando a estrutura a grandes mudanças na geometria e necessitando de reformular as equações de equilíbrio iniciais. São classificadas em dois tipos: o primeiro, ocorre quando há pequenas deformações, porém há grandes deslocamentos ou rotações, e ocorrem, em geral, em arcos, molas, barras de treliças, placas e cascas finas; o segundo, ocorre com grandes deformações, que acompanha geralmente a não linearidade física (LACERDA, 2014).

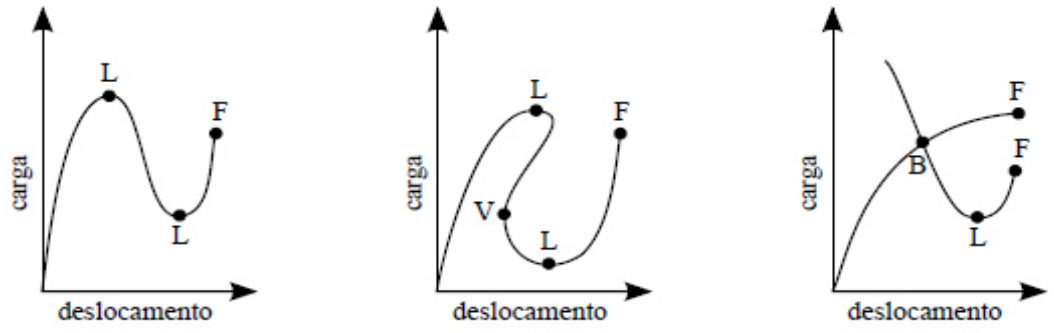
Os exemplos de treliça de duas e três dimensões apresentados por Bonet, Gil e Wood (2012) demonstram o comportamento complexo e muitas vezes inesperados de carga *versus* deslocamento quando inclui a não-linearidade geométrica na análise estrutural. Confunde-se, geralmente, o conceito de elasticidade com o de linearidade. Um elemento é considerado feito de material linear elástico quando este retorna ao comprimento inicial após a retirada do carregamento, não desenvolvendo deformação residual (BORGES, 1999).

A não linearidade física, por sua vez, caracteriza-se por ocasionar relações não lineares entre tensão e deformação e tendo a análise estrutural dependente do histórico de deformação sofrido pelo material (LACERDA, 2014). A não linearidade física está relacionada com as propriedades intrínsecas do material e gera a não proporcionalidade entre causa e efeito (BORGES, 1999). Na literatura diversas áreas de pesquisas abordam a não linearidade física: Pinto (1997) analisa o comportamento não linear geométrico e físico de concreto armado e Greco *et. al* (2005) apresentam o comportamento de uma treliça de três membros que apresenta não linearidade física.

2.4. CAMINHOS DE EQUILÍBRIO

Ao estudar o comportamento do sistema variando um parâmetro de controle, tal como o carregamento, obtêm-se as trajetórias ou caminhos de equilíbrio. Mudanças de caráter qualitativo podem surgir no decorrer dos caminhos de equilíbrio.O estudo da estabilidade estrutural apoia-se na identificação de pontos críticos que surgem com a perda de estabilidade. Os pontos críticos, ou pontos de fronteira, são classificados em pontos limites ou pontos de bifurcação. Pontos de bifurcação são pontos de mudança brusca na trajetória de equilíbrio, em que dois ou mais caminhos de equilíbrio se cruzam. Os pontos limites, por sua vez, são pontos que correspondem a valores de máximos, ou mínimos, relativos de carga, ou deslocamento, em torno de um ponto (GONÇALVES, 1994; MARTINS, GRECO, 2014; LACERDA, 2014). A Figura 2.1 ilustra, segundo Lacerda (2014), os pontos limites (L), os pontos de bifurcação (B), os pontos de viragem (V) e os pontos de falha (F) de um caminho de equilíbrio.

Figura 2.1 –Trajetórias de equilíbrio típicas para os sistemas treliçados (a) *snap-throught* (b) *snap-back* (c) bifurcação. Fonte: Lacerda (2014)



(a) *snap-through* (b) *snap-back* (c) bifurcação

O *snap-through* refere-se à determinado trecho de equilíbrio, que a partir do primeiro ponto limite de deslocamento não pode ser verificado por controle de carga. A tangente de rigidez torna-se negativa a partir do primeiro ponto limite de deslocamento e a estrutura torna-se instável. Já o *snap-back*, por sua vez, a determinação de alguns pontos não pode ser feita por passo de deslocamento, sendo uma forma amplificada do *snap-through* cujo caminho de equilíbrio chega a dobrar sobre si mesmo (LACERDA, 2014).

Exemplos de treliça espaciais e planas que apresentam não linearidade física serão abordados no presente trabalho com o intuito de verificar a influência da não linearidade física nas trajetórias de equilíbrio, observando os fenômenos não lineares já citados: *snap-through* e *snap-back*.

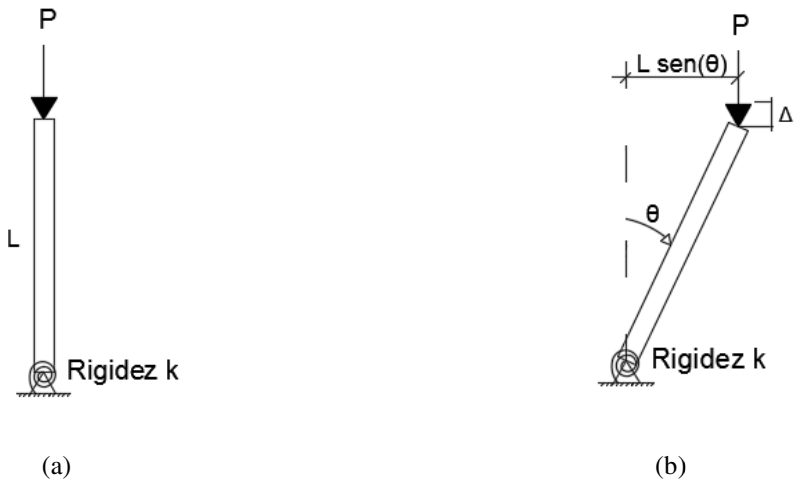
2.5. COMPORTAMENTO NÃO LINEAR DE SISTEMAS MECÂNICOS

Através do estudo da estabilidade elástica para sistemas mecânicos com apenas um grau de liberdade é possível descrever alguns conceitos básicos para o entendimento da estabilidade estrutural. Os sistemas abordados são compostos de barra rígida associada com molas rotacionais lineares. Na primeira sub seção abordará a bifurcação simétrica estável e instável. A segunda seção será abordado a bifurcação assimétrica. Por fim, a terceira sub seção, apresentará a bifurcação global.

2.5.1 Bifurcação simétrica estável e instável

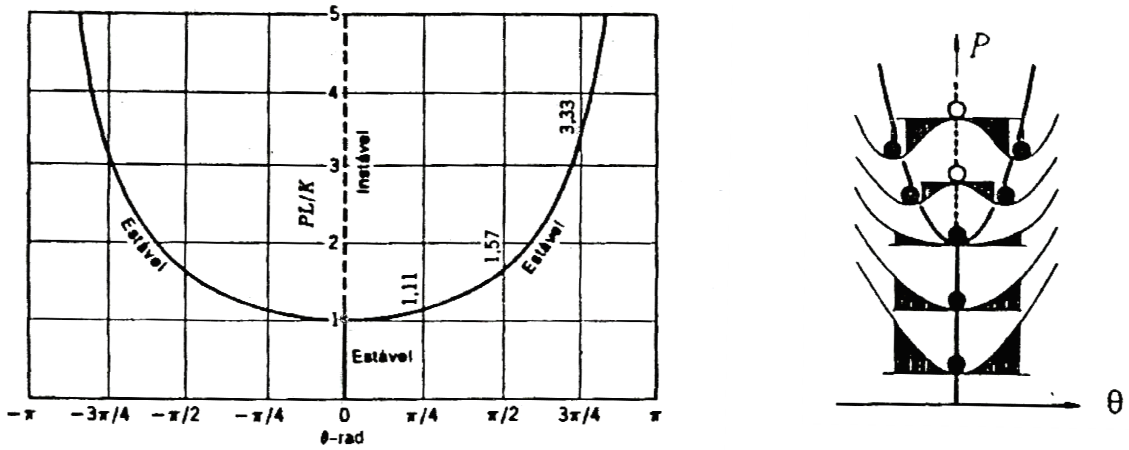
Gonçalves (1993), para ilustrar o comportamento não linear de bifurcação simétrica estável, analisa um modelo mecânico de um grau de liberdade, composto por uma barra infinitamente rígida, de comprimento L, peso desprezível e submetida a uma carga vertical de compressão P, cujas condições de apoio da barra são: livre no topo e presa na base por uma mola elástica de rigidez torcional k, que produz um momento $k\theta$ quando a barra sofre uma rotação θ, conforme ilustra a Figura 2.2.

Figura 2.2 – Sistema mecânico para análise da bifurcação estável (a) barra na configuração indeslocada (b) barra na configuração deslocada



Utilizando o método de Lagrange, é possível verificar que a primeira solução se dá para $\theta = 0$, para qualquer valor de P, sendo esta a solução fundamental; e a segunda solução é o caminho secundário denominado de pós-crítico. Dois caminhos se cruzam no ponto $\theta = 0$ e $P = K/L$, sendo este o ponto de bifurcação do sistema, em que esta carga é denominada de crítica, ou carga de flambagem. Para se determinar a estabilidade nos caminhos de equilíbrio, calcula-se o valor para a derivada de 2ª ordem da energia potencial total do sistema e no ponto crítico deve-se estudar os sinais das derivadas de mais alta ordem. Quando a carga é menor do que a carga crítica, o sistema é estável, caso contrário o caminho fundamental será instável. O caminho pós-crítico, por sua vez, é estável para $\theta < |\pi|$, conforme ilustra na Figura 2.3(a) (GONÇALVES, 1993). A Figura 2.3(b), contudo, mostra a representação qualitativa da variação da energia potencial total, no gráfico P *versus* θ (GONÇALVES, 1993). Nota-se a analogia ao conceito de estabilidade da massa esféricas repousando sobre superfícies curvas.

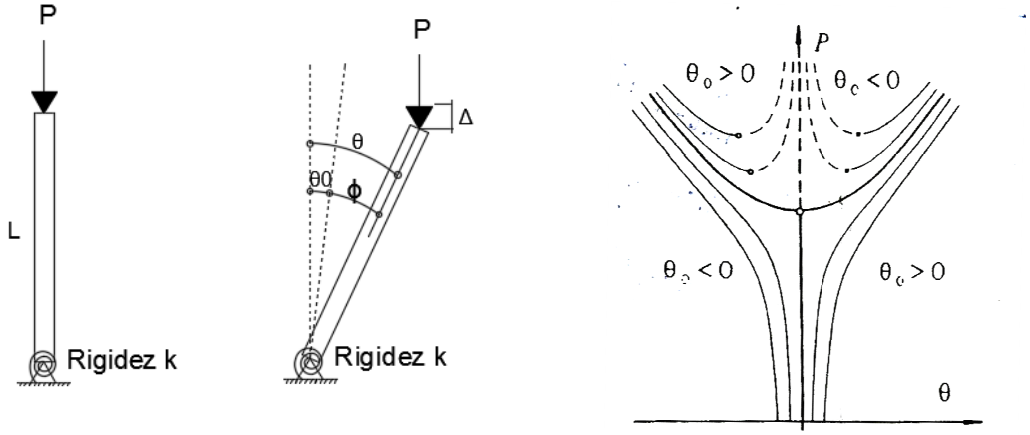
Figura 2.3 – (a) caminhos de equilíbrio para bifurcação simétrica estável (b) variação de energia potencial para diferentes níveis de carregamento para o caso da bifurcação estável. Fonte: Gonçalves (1993)



(a) (b)

Ao analisar uma estrutra real nota-se que ao se construir uma coluna na posição vertical uma pequena rotação, mesmo que infinitesimal, pode existir. A este tipo de desvio em toda estrutura real, denomina-se imperfeição geométrica inicial (GONÇALVES, 1993). A Figura 2.4 ilustra essa estrutura com imperfeição geométrica θ_0 e a bifurcação simétrica estável para estrutura que apresenta imperfeição geométrica.

Figura 2.4 – Bifurcação simétrica estável com imperfeição geométrica (a) sistema mecânico (b) caminhos de equilíbrio. Fonte: Gonçalves (1993)

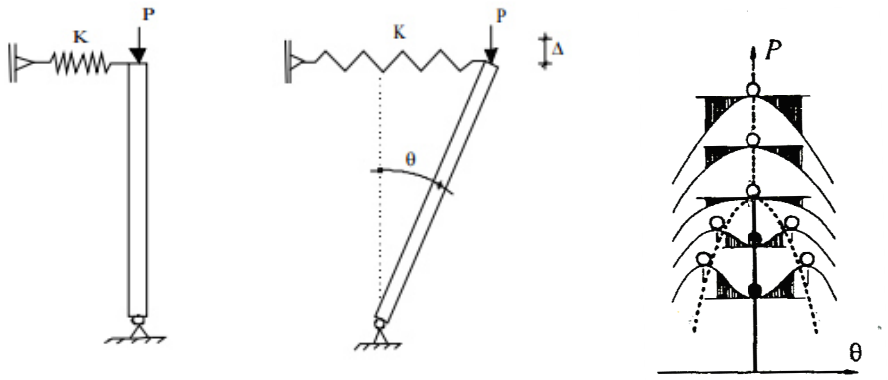


(a) (b)

Percebe-se que quando a carga se aproxima do valor da carga crítica do sistema perfeito, passa a ter grandes deflexões laterais. Este caminho é denominado de caminho não linear de equilíbrio do sistema imperfeito. Quando se considera uma imperfeição negativa, tem-se que os resultados são nada mais que um espelhamento da resposta anterior (GONÇALVES, 1993).

Considere uma barra rígida de comprimento *L*, apresentando em sua lateral esquerda superior uma mola translacional de rigidez *K* apoiada em um apoio de primeiro gênero que permite o deslocamento vertical, com uma carga vertical de valor *P* aplicada na coluna, inicialmente descarregada, e na base um apoio de segundo gênero, como apresentado na Figura 2.5(a). A partir do estudo da estabilidade estática, obtém-se uma bifurcação simétrica instável para o sistema estrutural da Figura 2.5(a) (GONÇALVES, 1993). A primeira solução se dá para $\theta = 0$, para qualquer valor de *P*, sendo esta a solução fundamental; e a segunda solução é o caminho secundário denominado de pós-crítico. Estes dois caminhos se cruzam no ponto $\theta = 0$ e $P = K/L$, sendo este o ponto de bifurcação do sistema. Para se determinar a estabilidade nos caminhos de equilíbrio, calcula-se o valor para a derivada de 2ª derivada da energia potencial, a qual é, neste modelo, menor que zero para quaisquer valores diferentes de zero, mostrando ser instável o caminho de equilíbrio. A Figura 2.5(b) ilustra o sistema mecânico após uma deformação inicial e por um carregamento vertical na posição superior da coluna enquanto a Figura 2.5(c) o comportamento pós critico com a variação de energia potencial.

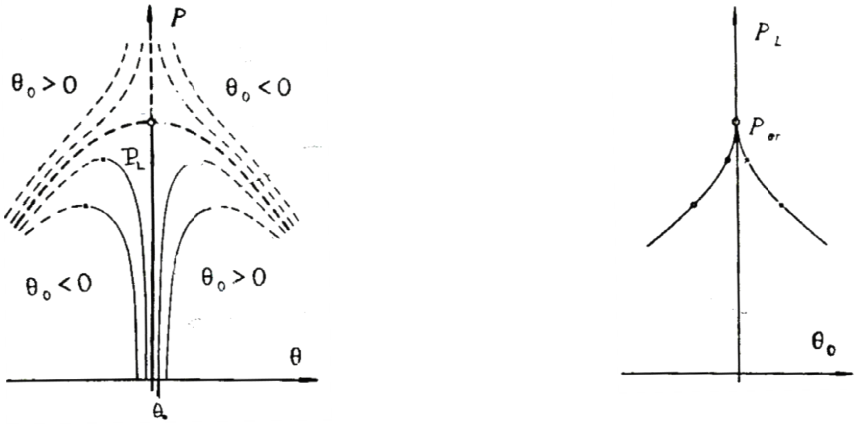
Figura 2.5 – (a) sistema mecânico indeformado para verificar a bifurcação simétrica instável (b) sistema mecânico deslocado (c) variação de energia potencial para diferentes níveis de carregamento para o caso da bifurcação instável. Fonte: Gonçalves (1993)



(a) (b) (c)

As imperfeições no sistema que apresentam a bifurcação simétrica instável são levadas em consideração de maneira análoga ao caso da barra rígida com mola rotacional, todavia uma pequena imperfeição faz com que o novo caminho de equilíbrio, imperfeito, diminua a capacidade de suportar carga. A Figura 2.6(a) mostra as trajetórias de equilíbrio para o sistema imperfeito e a Figura 2.6(b) a variação da carga máxima do sistema imperfeito com o incremento do nível de imperfeição. Nesse sentido, diz-se que os sistemas estruturais que apresentam bifurcação simétrica instável são sensíveis às imperfeições geométricas iniciais, pois a carga limite diminui com o incremento da imperfeição geométrica inicial.

Figura 2.6 – (a) caminhos de equilíbrio com imperfeição geométrica para o caso da bifurcação simétrica instável (b) cargas limites *versus* imperfeições geométricas. Fonte: Gonçalves (1993)

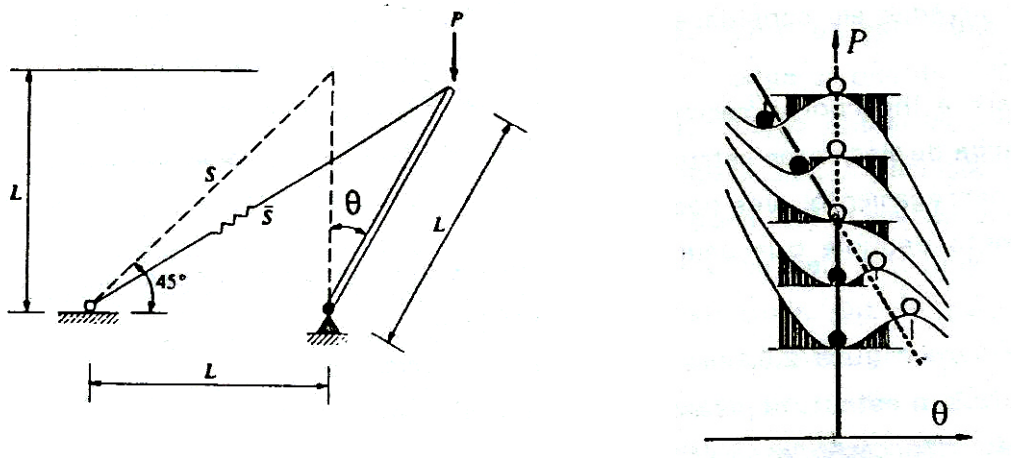


(a) (b)

2.5.2. Bifurcação assimétrica

Gonçalves (1993) considera um modelo semelhante ao da Figura 2.5, entretanto com a mola inclinada para obter a bifurcação assimétrica como ilustrado na Figura 2.7(a). Estruturas em engenharia civil, como pórticos assimétricos, podem apresentar esse tipo de carregamento. A partir de uma barra rígida sem peso, inicialmente vertical, com mola linear inclinada a 45º quando descarregada. A Figura 2.7(b) apresenta o comportamento desse sistema. Perturbações negativas, $\theta < 0$, levam o sistema a equilíbrio estável. Já as perturbações positivas, todavia, levam a um caminho crítico com ponto limite, sendo a carga limite a maior carga que o sistema pode suportar. Gonçalves (1993) destaca que em engenharia civil, em particular, não se tem o controle sobre a forma e o nível de imperfeição, devido as formas de fabricação e montagem durante o tempo útil da estrutura, portanto sugere que deve ser considerado pelo projetista de estruturas o fato de que as bifurcações assimétricas são sensíveis a imperfeições.

Figura 2.7 – (a) sistema mecânico para o modelo da bifurcação assimétrica (b) variação de energia potencial para diferentes níveis de carregamento para o modelo de bifurcação assimétrica. Fonte: Gonçalves (1993)



(a) (b)

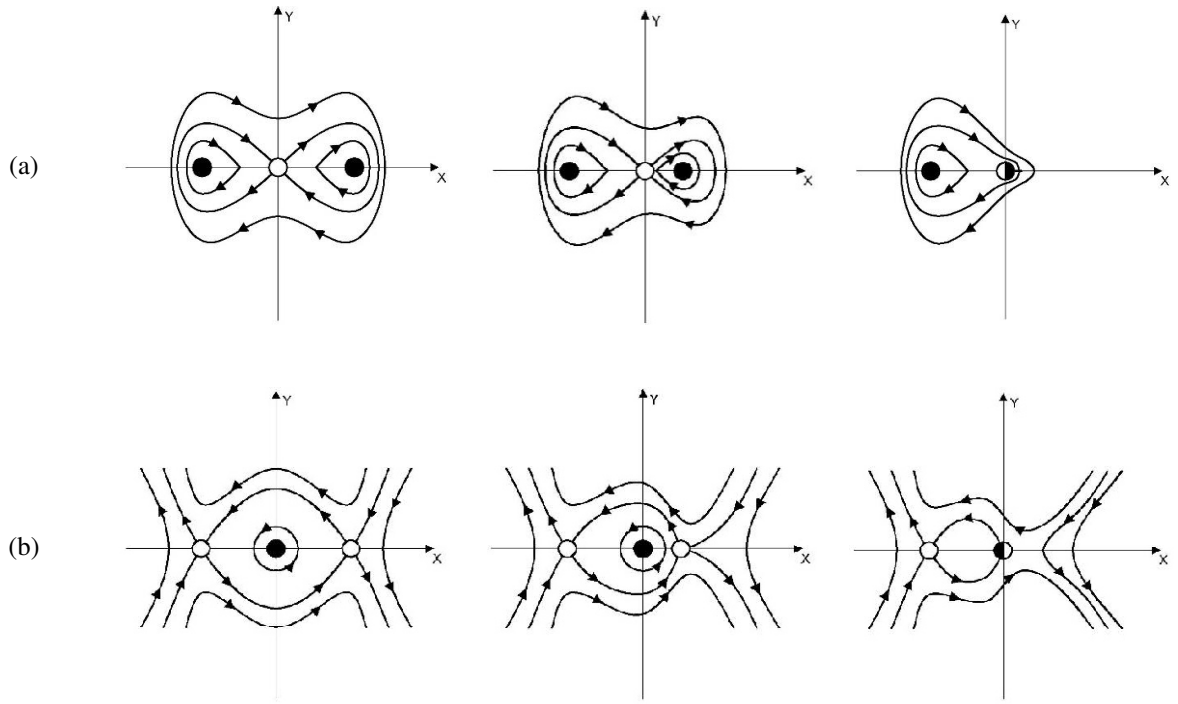
2.5.3. Bifurcaçao simétrica global

As bifurcações globais representam mudanças qualitativas nos aspectos globais do fluxo de um sistema dinâmico, pois, a partir da variação de um parâmetro do sistema pode ocorrer uma variação na estrutura de orbitas em uma região do espaço fase, destacando que são inúmeras as formas de bifurcações globais (SAVI, 2006).

Esta bifurcação tem comportamento definido por um salto dinâmico, característico de arcos, cascas e de treliças. O valor crítico é aqui chamado de ponto limite, onde a estrutura "salta" para outra configuração, geralmente distante da anterior (BAŽANT, 2000). A nomenclatura "bifurcação global" se justifica pela impossibilidade de prever tais comportamentos por análises locais como o cálculo de autovalores (MONTEIRO, 2011).

A destruição de trajetórias homoclínicas ou heteroclínicas no espaço de fases é o resultado de bifurcações globais (MONTEIRO, 2011). Trajetórias homoclínicas conectam um ponto de sela a ele mesmo, circundando dois centros estáveis. Já trajetórias heteroclínicas, por sua vez, conectam dois pontos de sela distintos, circundando um centro estável. Uma forma de verificar tais bifurcações, a saber, parte da análise qualitativa do espaço de fases para diferentes valores do parâmetro de controle. Observa-se a bifurcação que se verifica pela aproximação de dois pontos de equilíbrio. A Figura 2.8 ilustra o comportamento do retrato de fases de um sistema sob bifurcação homoclínica, Figura 2.8(a), e heteroclínica. Figura 2.8(b).

Figura 2.8 – (a) Bifurcação homoclínica (b) bifurcação heteroclínica



CAPÍTULO 3

METODOLOGIA E RESULTADOS NUMÉRICOS

Este capítulo será dividido em duas seções: na primeira seção será abordada a metodologia para obtenção dos resultados numéricos; na outra, por sua vez, serão apresentados os resultados numéricos obtidos para as diferentes geometrias estudadas, considerando os efeitos de não linearidade geométrica e física, confrontando, sempre que possível, estes resultados com os resultados reportados na literatura.

3.1 - METODOLOGIA

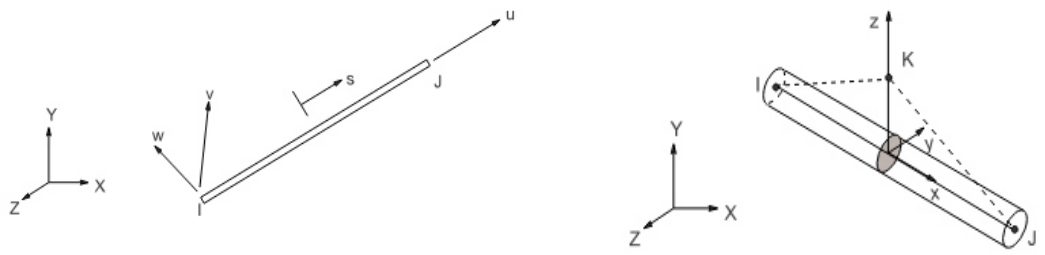
Para se obter com fidelidade como é o comportamento das treliças espaciais deve-se levar em conta a não linearidade geométrica e física. Para isso, através de uma análise não linear serão obtidos os caminhos de equilíbrio dos sistemas estruturais treliçados, avaliando a influência de sua geometria e da lei constitutiva do material. Desta maneira, esta pesquisa se classifica como uma pesquisa experimental numérica com simulação computacional.

Por meio de um *software* de elementos finitos (MEF), Ansys®, serão obtidos os resultados numéricos de deslocamento *versus* carga aplicada nas treliças espaciais analisadas. Em uma fase inicial de pré-processamento do *software*, insere-se os dados para a construção da geometria espacial da treliça escolhida. Em seguida, escolhe-se o tipo de elemento finito para a solução do sistema estrutural em uma biblioteca de elementos finitos já existente no *software*. Esta escolha deve contemplar as especificidades da análise tais como graus-de-liberdade e capacidade de avaliar grandes deslocamentos e rotações por exemplo. Cabe destacar que nesta etapa uma análise de convergência em termos dos deslocamentos, das tensões ou da frequência natural, deve ser realizada para avaliar a qualidade do elemento escolhido e suas habilidades em fornecer os resultados não lineares desejados.

Os elementos utilizados nas treliças estudadas no presente trabalho são o LINK 180 e o BEAM 188. O LINK 180 é um elemento reticular 3D que é útil em uma variedade de aplicações de engenharia, e pode ser usado para modelar treliças, cabos com perda de rigidez e molas. O LINK 180 atua na direção uniaxial com compressão ou tração, e não se considera qualquer flexão do elemento. O LINK 180 possui três graus de liberdade em cada nó, todos associados ao

deslocamento nas três direções cartesianas, e podem incorporar a plasticidade, fluência, rotação, grande deflexão e grandes capacidades de deformação para obtenção da solução. O elemento BEAM 188, por sua vez, é adequado para a análise de estruturas de vigas de delgadas a grossas. O elemento baseia-se na teoria de viga de Timoshenko, a qual inclui efeitos de deformação por cisalhamento. O elemento BEAM 188 possui 6 ou 7 graus de liberdade por nó: incluem as translações nas direções *x*, *y* e *z*; rotações sobre as direções *x*, *y* e *z*; e a magnitude de deformação, um sétimo grau de liberdade opcional geralmente associado ao empenamento da seção transversal. O único exemplo estudado no presente trabalho que utiliza o elemento BEAM 188 é o 4º exemplo, uma vez que para obter a solução numérica que considera a flambagem é necessário a consideração do momento de inércia transversal da seção transversal. No Capítulo 13 do manual de utilização do Ansys® é possível obter mais informações sobre esses elementos.

Figura 3.1 – Descrição do elemento finito (a) LINK 180 (b) BEAM 188. Fonte: Ansys®



(a) (b)

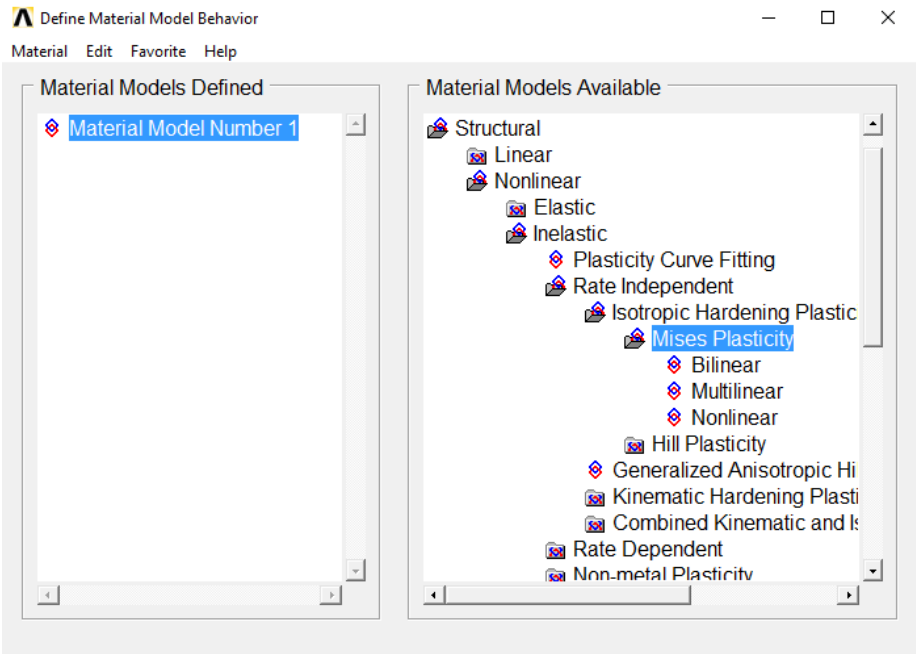
Continuando com a construção do modelo discreto via elementos finitos, o próximo procedimento consiste na determinação da área da seção transversal dos elementos e a inserção das propriedades dos materiais como a definição do módulo de elasticidade para uma análise elástica ou com a definição da lei constitutiva do material para a consideração da não linearidade física. A Figura 3.2 ilustra a janela da interface do Ansys® onde se insere a não linearidade física do material escolhida para ser avaliada no presente trabalho.

Em seguida, cria-se a malha de elementos finitos do problema e inicia-se a fase de solução do sistema de equações discretizadas do modelo físico. A quantidade de elementos é unitária para discretizar cada barra da treliça que é composto pelos elementos LINK 180, pois esta quantidade é suficientemente capaz de obter uma boa resposta numérica. Por sua vez, ao considerar o elemento BEAM 188 o número de divisões deve ser maior para obter uma maior precisão numérica. Vale ressaltar que quanto maior o número de divisões maior será o esforço computacional, demandando um maior tempo de processamento. Nesta etapa, tem-se a definição do tipo de análise – estática, modal, harmônica, transiente entre outras –onde deve-se acionar os efeitos de

grandes deslocamentos para que seja feito uma análise não linear. Destaca-se que o Ansys® emprega para a solução incremental das equações não lineares um método numérico conhecido como *arc-length,* ou comprimento de arco, o qual controla os deslocamentos e os níveis de carregamento, simultaneamente, por meio de uma restrição, que é uma hiper-esfera generalizada, à equação não linear do problema, garantindo a convergência a cada passo de carga.

Por fim, definido o tipo de análise, aplica-se o carregamento nos nós e as condições de contorno ao sistema estrutural para que os resultados sejam obtido se comparados com os resultados obtidos em trabalhos encontrados na literatura, em um primeiro momento, seguido de uma análise paramétrica envolvendo a geometria e a lei constitutiva da treliça.

Figura 3.2 – Local de inserção da não linearidade física do material no Ansys®



3.2 - RESULTADOS NUMÉRICOS

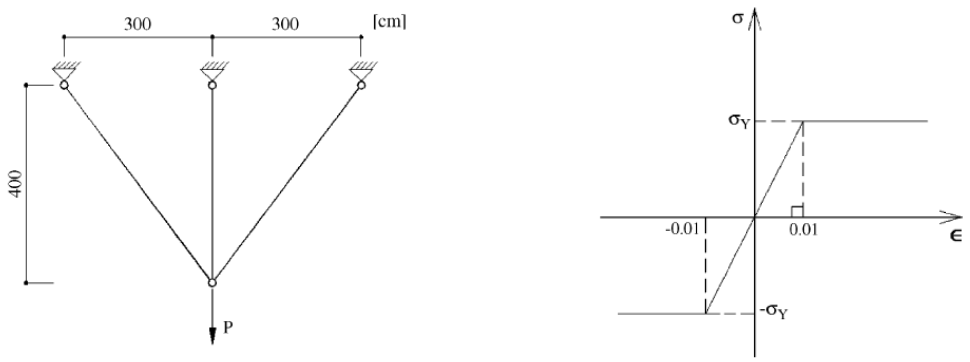
Nesta seção são avaliadas o comportamento não linear de treliças planas e espaciais dentro de uma abordagem não linear geométrica e física com a comparação, sempre que possível, com outros resultados presentes na literatura.

3.2.1 - Treliça plana de três elementos

Neste exemplo apresenta-se o comportamento não linear de uma treliça plana com a geometria e a lei constitutiva do material definidas na Figura 3.3. A solução dada por Greco *et al.* (2006) foi

obtida com o uso de três elementos finitos e com passos de deslocamentos de 0,5 cm aplicados no nó central com o emprego do método numérico *arc-length*, cuja finalidade desse exemplo se deu com o objetivo de avaliar a formulação proposta em seu artigo. O módulo de elasticidade (*E*) das barras tem valor de 1000kN/cm², a área da seção transversal das barras (*A*) igual a 1 cm² e tensão de escoamento (σy) tem valor de 10 kN/cm². Neste exemplo há uma fase de carregamento da estrutura e uma fase com descarregamento e posterior carregamento no sentido inverso o que permite a verificação da influência das deformações plásticas que ocorrem no material.

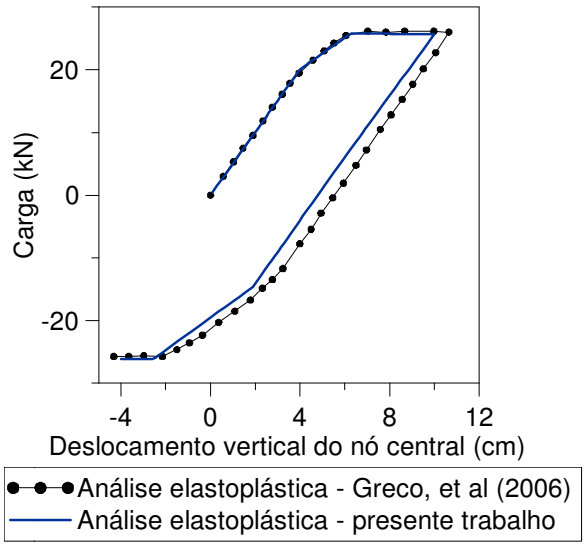
Figura 3.3 – (a) - Geometria da treliça plana (b) - lei constitutiva do material. Fonte: Greco *et al.*(2006)



(a) (b)

Nesse trabalho, o tipo de elemento utilizado para discretizar a treliça foi o LINK 180. Entretanto para um problema bidimensional a direção perpendicular ao plano definido tem deslocamento nulo. Os resultados obtidos por Greco *et al.* (2006) estão representados pela em curva preta da Figura 3.4 e o presente trabalho pela curva azul da Figura 3.4.

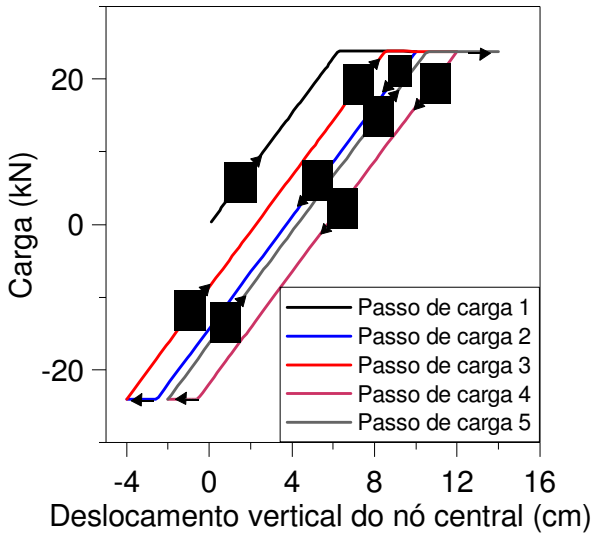
Figura 3.4 – Relação de carga *versus* deslocamento vertical central



Nota-se na Figura 3.4 que os resultados obtidos no presente trabalho são satisfatórios. Na primeira parte do gráfico, considerando o carregamento vertical para baixo até o valor de 25 kN, nota-se que os resultados são bastantes próximos. Na segunda parte do gráfico, ocorre um descarregamento da estrutura e, em seguida, uma inversão no carregamento vertical até, aproximadamente, 22 kN. Verifica-se que há uma pequena diferença entre os resultados devido a uma diferença no valor do carregamento inicial. No presente trabalho o carregamento inicial ocorreu para o deslocamento vertical da posição original do nó central de 10 cm. Já no trabalho de Greco *et al.* (2006) este valor se estendeu um pouco além. Nota-se na Figura 3.4 a influência das deformações plásticas, cujo corpo permanece, após a aplicação de um carregamento superior ao limite elástico do material, em uma posição diferente da configuração indeformada. A resposta obtida pelo Ansys® possui carga inicial de plastificação no valor de 20,34 kN e carga limite de 25,77 kN, valores próximos aos observados analiticamente por Greco *et al.* (2006) que obtiveram, respectivamente, os seguintes valores 20,24 kN e 26 kN.

A Figura 3.5 ilustra o comportamento de sucessivos processos de carregamento e descarregamento da treliça dada na Figura 3.3(a) e os deslocamentos registrados ao final de cada processo de carregamento e descarregamento. O sentido positivo de carga e de deslocamento é para baixo.

Figura 3.5 – (a) Carga *versus* deslocamentos para diferentes estágios de carga/descarga (b) dados de carregamento aplicados no nó central



(a)

Passo de Carga	Deslocamento (cm)
1	10
2	-4
3	12
4	-2
5	14

(b)

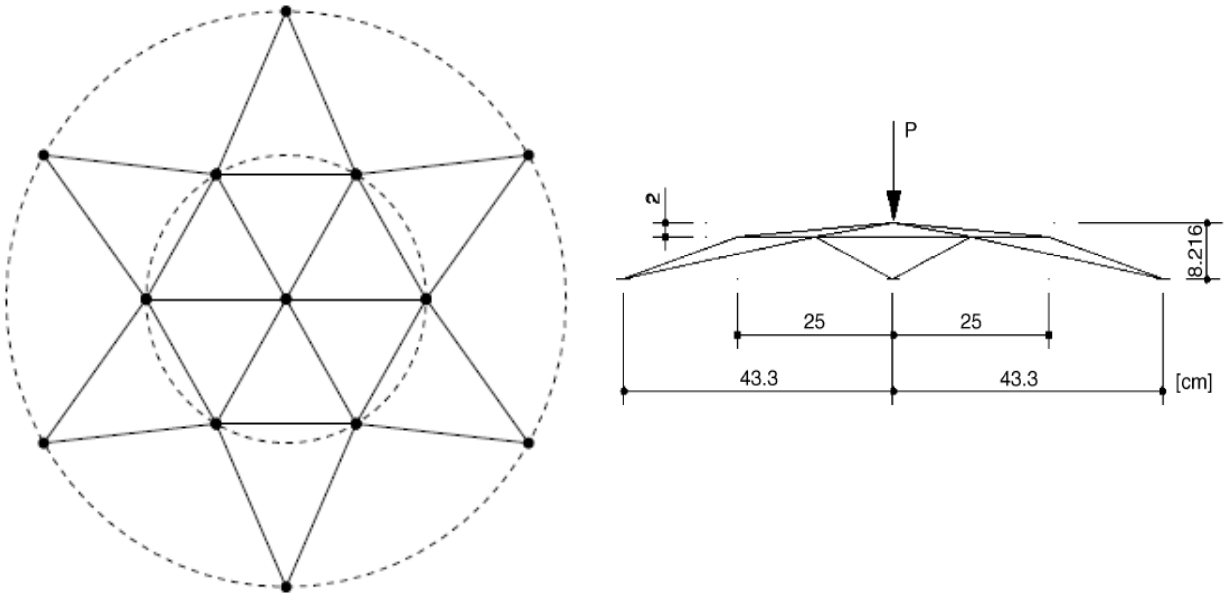
Nota-se na Figura 3.5 que ao descarregar a estrutura ela não retorna à posição inicial antes da aplicação do carregamento devido às deformações plásticas registradas durante o processo de

carregamento e descarregamento. Isso foi explorado com a aplicação e retirada de carregamento à estrutura, obtendo um gráfico de histerese, cuja resposta precedente depende da história de deformação anterior e evidencia que, a cada processo de carregamento da treliça, maiores são os deslocamentos registrados o que pode levar ao colapso estrutural por fadiga.

3.2.2 - Domo treliçadode 24 elementos

Neste exemplo aborda-se uma estrutura espacial de treliça que apresenta um comportamento não linear geométrico e físico. A treliça é composta por 24 elementos finitos do tipo LINK 180, totalizando 13 nós. O módulo de elasticidade (*E*) das barras tem valor de $3x10^5$N/cm², a área da seção transversal das barras (*A*) é igual a 3,17 cm² e a tensão de escoamento adotada ao considerar na análise elastoplástica (σy) tem valor de 200 kN/cm². A Figura 3.6 apresenta a geometria e as dimensões da treliça espacial bem como o carregamento atuante.

Figura 3.6 – Treliça Domo reticulado de 24 elementos (a) planta do domo (b) dados da geometria. Fonte: Greco *et al.*(2006)



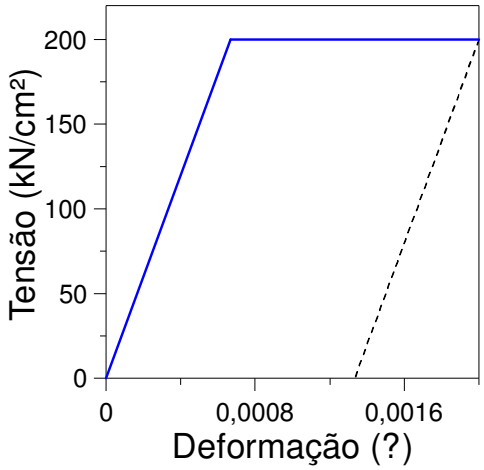
(a) (b)

Esse exemplo é comum na análise não linear de treliças espaciais em diversas literaturas, tais como: Blandford (1996), Krishnamoorthy *et al.* (1996), Hill *et al*. (1989), Greco *et al.* (2006), Bonet *et al*. (2012) e Lacerda (2014). Os resultados obtidos por Greco *et al.* (2006) foram obtidos

por meio de uma formulação posicional, a qual fora comparada a resultados obtidos pelo *software* de elementos finitos Ansys® como ilustra a Figura 3.8.

Greco *et al.* (2006) obteve este comportamento através da aplicação de 250 passos de deslocamento de 0,1 cm aplicados no nó central da estrutura. A solução foi obtida considerando três casos: a linearidade elástica, a não linearidade geométrica e a não linearidade física juntamente com a não linearidade geométrica. Os resultados obtidos neste trabalho foram obtidos a partir do controle de deslocamento na posição de carga indicada na Figura 3.6(b). A inclusão do efeito elastoplástico se deu com a utilização do modelo não linear isotrópico bilinear do tipo *hardening mises*, conforme ilustra a Figura 3.7.

Figura 3.7 – Lei constitutiva do modelo não linear isotrópico bilinear do tipo *hardening mises*



Nota-se na Figura 3.8 que as relações entre deslocamentos *versus* carga obtidos pelo Ansys® são próximos dos valores obtidos Greco *et al.* (2006) e demonstram a influência das não linearidades físicas e geométricas no comportamento não linear da treliça espacial com a presença de *snap-through* na trajetória de equilíbrio. Observa-se a partir da Figura 3.8 que a consideração da não linearidade física no modelo numérico diminui a carga limite da treliça espacial quando comparada ao modelo numérico que considera apenas a não linearidade geométrica. A redução é da ordem de 21,50 %, neste exemplo. Essa diminuição da carga limite é prejudicial ao comportamento seguro da treliça espacial, pois antecipa o aparecimento do *snap-through*.

A Figura 3.9 apresenta os resultados de carga *versus* deslocamento obtidos pelo Ansys® considerando um intervalo maior de deslocamento vertical na posição de aplicação de carga. Para este caso foram obtidos somente respostas considerando a linearidade e a não linearidade geométrica. Observa-se na Figura 3.9 que a metodologia proposta neste trabalho, considerando grandes deslocamento, identifica um complexo caminho não linear de equilíbrio com diversos

snap-through e *snap-back* que não foram apresentados por Greco *et al.*(2006). Essa principal diferença, atribui-se aos parâmetros internos do método numérico *arc-length* do ANSYS® que não são facilmente acessíveis para manipulação do usuário o que pode ter levado ao favorecimento de uma família de solução não linear diferente da encontrada por Greco *et al.* (2006).

Figura 3.8 – Relação de carga *versus* deslocamento vertical central

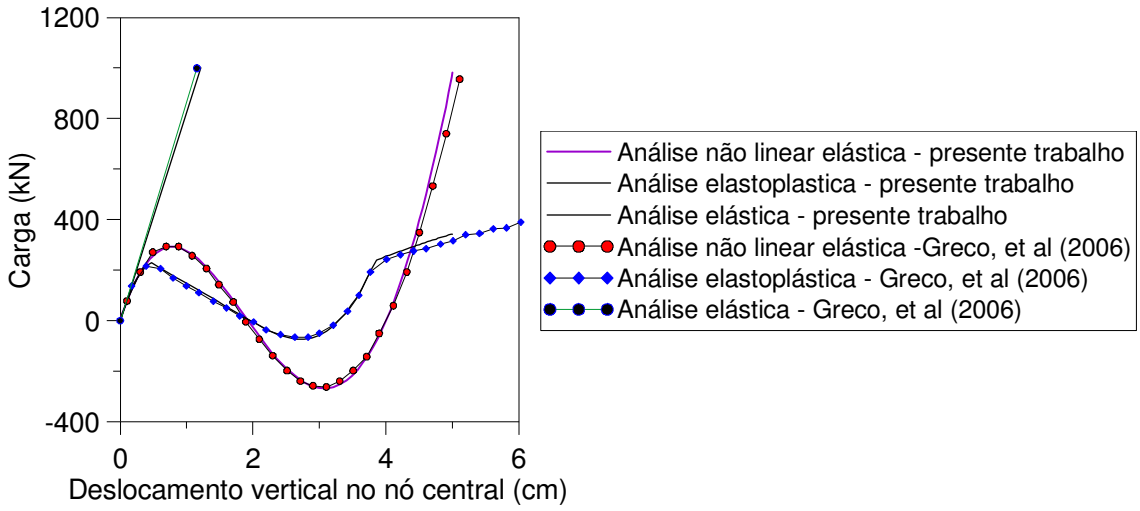
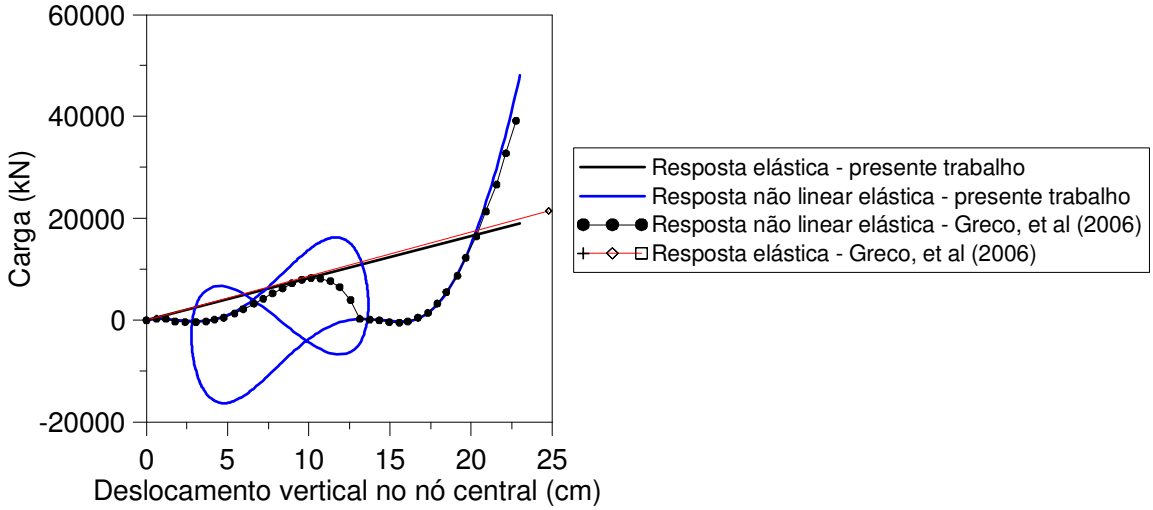


Figura 3.9 – Relação de carga *versus* deslocamento vertical para um intervalo maior

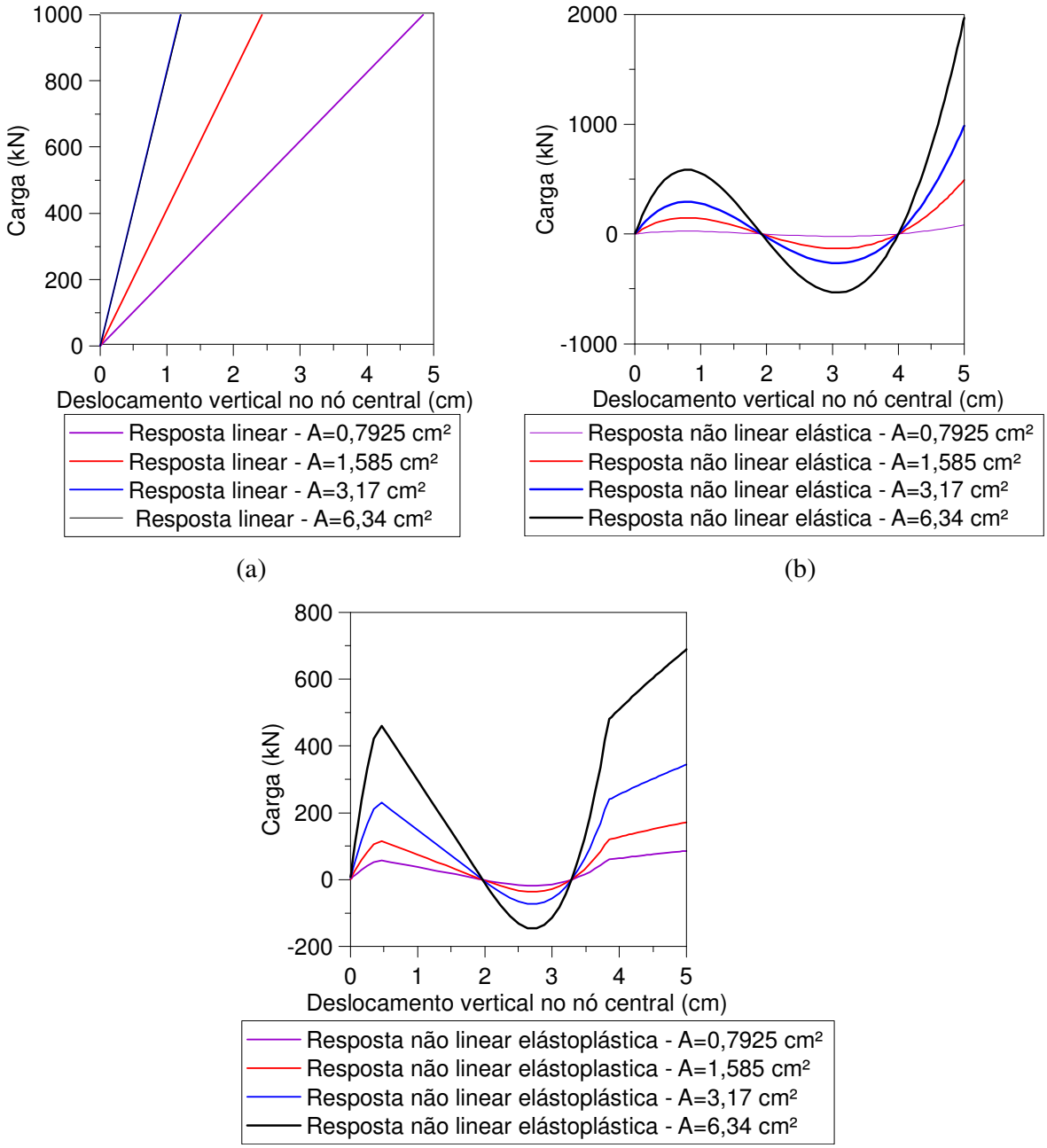


Resultados complementares foram verificados quanto as variações da área da seção transversal, da tensão plástica e do módulo de elasticidade do material com o intuito de observar as principais modificações que ocorrem nos caminhos de equilíbrio da treliça espacial.

A Figura 3.10 apresenta, para quatro valores da área da seção transversal das barras, as relações entre carga *versus* deslocamento obtidas em uma análise puramente linear física e geométrica,

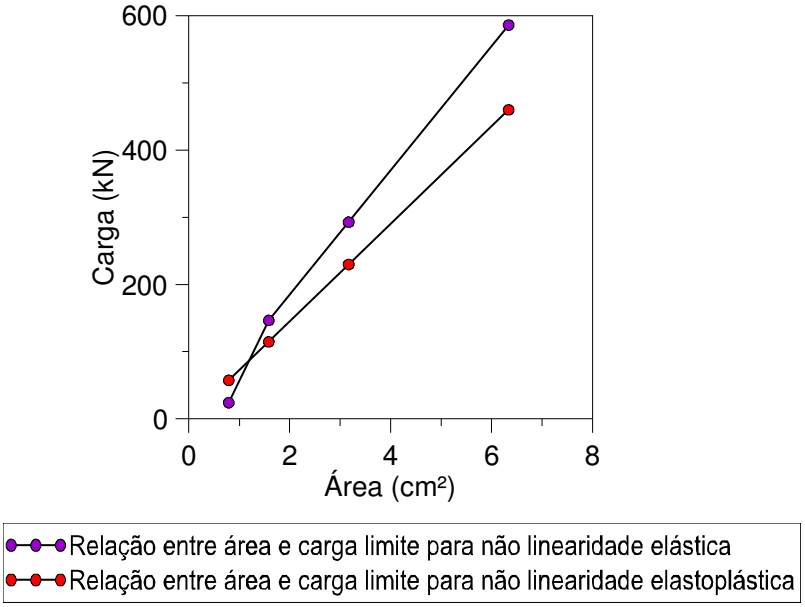
Figura 3.10(a), para uma análise não linear geométrica, Figura 3.10(b), e em uma análise não linear geométrica e física denominada análise elastoplástica, Figura 3.10(c). Percebe-se que quanto menor é a área da seção transversal menor será a carga limite independentemente da análise empregada. Isso era esperado por conta da rigidez axial de cada barra de uma treliça ser diretamente proporcional à área da seção transversal.

Figura 3.10 – Variação quanto a área (a) - relações entre deslocamento versus carga para uma resposta linear (b) - relação entre deslocamento versus carga considerando a não linearidade geométrica (c) - relação entre deslocamento versus carga considerando a não linearidade física



A Figura 3.11 mostra uma relação pontual entre a primeira carga limite *versus* a área da seção transversal da treliça ligados por meio de uma reta. Os pontos em roxo representam a carga limite do caminho de equilíbrio considerando apenas a não linearidade geométrica enquanto os pontos em vermelho representam carga limite da trajetória de equilíbrio considerando as não linearidades geométrica e física. Observa-se nesta figura que quando se consideram ambas as não linearidades, física e geométrica, a carga limite é inferior a carga limite dos casos que se considera apenas a não linearidade geométrica independentemente da área da seção transversal das barras, o que já era esperado. A exceção na Figura 3.11 se deu apenas para o caso de A = 0,7925 cm², pois nesse caso a esbeltez do sistema é predominante sobre os efeitos da não linearidade física.

Figura 3.11 –Relação entre a área e a carga limite antes do primeiro *snap-through*



A Figura 3.12 ilustra as relações de carga *versus* deslocamento para diferentes valores da tensão plástica do material, cujo modelo constitutivo do material é semelhante ao ilustrado na Figura 3.7. Percebe-se na Figura 3.12 que com a diminuição da tensão plástica há uma diminuição na carga limite, tornando a estrutura mais flexível e mais suscetível a perda de estabilidade. A Figura 3.13 apresenta a variação da carga limite da treliça *versus* a tensão de escoamento do material, indicada no gráfico pelos pontos azuis. A partir da Figura 3.13 é possível constatar que quanto menor é a tensão de escoamento menor é a carga limite, conforme o esperado e que quanto maior a tensão plástica a carga limite tende a estabiliza-se em um valor, o qual se refere a carga limite sem considerar a não linearidade física.

Figura 3.12 –Relação entre a carga aplicada *versus* o deslocamento vertical no nó central considerando a variação da tensão de escoamento

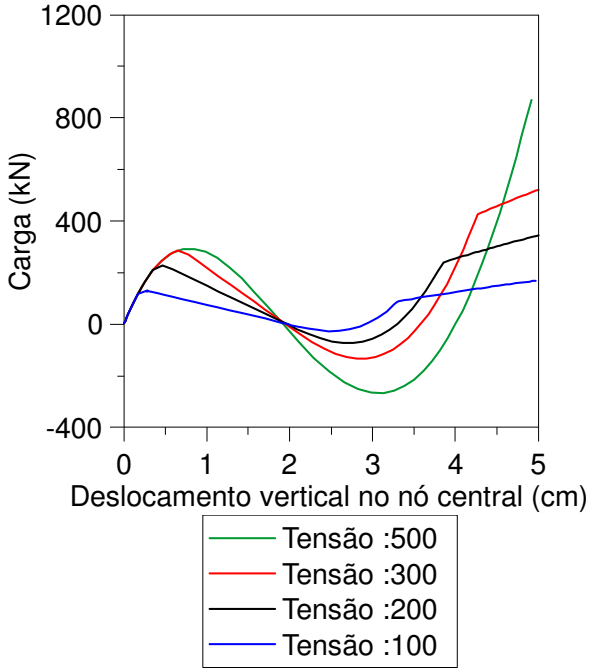
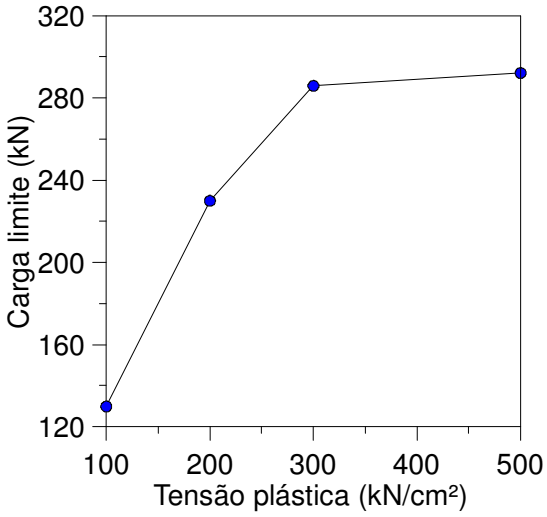


Figura 3.13 –Relação entre a tensão plástica e a carga limite antes do primeiro *snap-through*



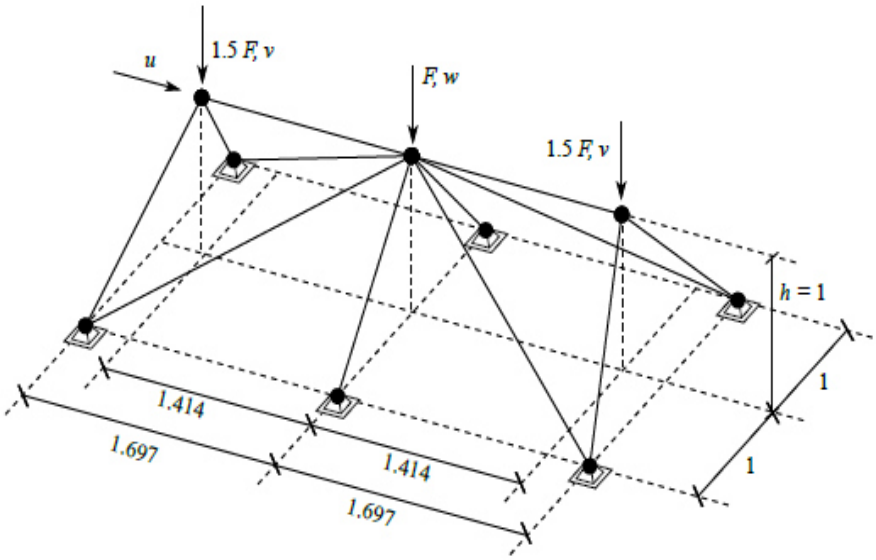
3.2.3 -Treliça espacial de 12 barras

Neste exemplo a treliça espacial é composta por 12 elementos e apresenta três nós livres, cuja trajetória de equilíbrio é considerada fortemente não-linear, com vários pontos limites de carga e de deslocamento. Resultados parciais para a solução não-linear desta estrutura foram apresentados

por Yang e Kuo (1994). Porém, a solução completa dessa trajetória foi obtida por Krenk e Hededal (1993; 1995). Autores como Pinheiro (2003) e Lacerda (2014) também contribuíram à literatura aplicando este exemplo em seus estudos. A partir dos resultados obtidos por Krenk e Hededal (1993; 1995) e Krenk (2009), os resultados obtidos neste trabalho, por meio do Ansys®, são comparados entre si.

A Figura 3.14 apresenta a geometria e as dimensões da treliça espacial, bem como o carregamento atuante, cujo módulo de elasticidade (*E*) multiplicado a área da seção transversal (*A*) será igual a 1. O problema original não apresenta não linearidade física, entretanto resultados complementares que a abordam serão apresentados no presente trabalho

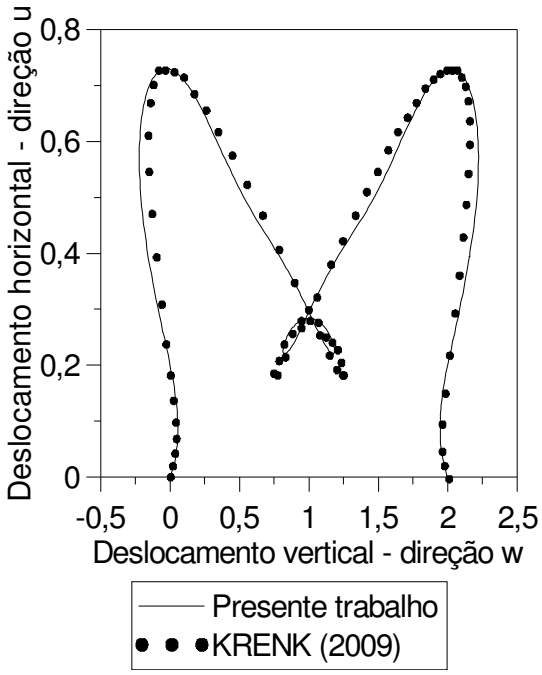
Figura 3.14 – Treliça espacial de 12 barras. Fonte: Pinheiro (2003)



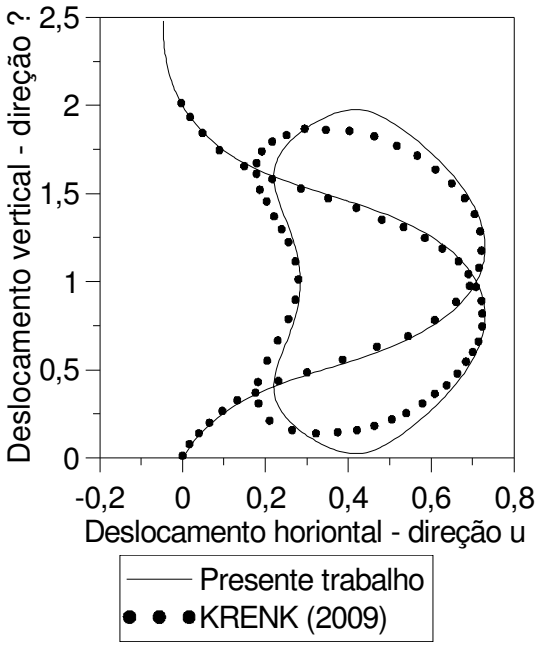
Na Figura 3.15, nota-se que as relações entre deslocamentos obtidos pelo Ansys® são próximos dos valores obtidos pelos autores já citados. Os resultados obtidos neste trabalho, com a aplicação da carga nos locais conforme ilustra a Figura 3.14, cujo parâmetro *F* vale 0,1, são satisfatórios e demonstram a não linearidade geométrica do sistema treliçado, com diversos *snap-through* e *snap-back* do caminho de equilíbrio da treliça espacial.

A Figura 3.16 por sua vez, apresenta a relação do parâmetro *F* com a variação dos deslocamentos verticais *v* e *w*, e vertical *u*. Percebe-se que os resultados obtidos neste trabalho apresentaram uma variação maior ao se comparar com os autores Krenk e Hededal (1995) e Krenk (2009) provavelmente devido aos parâmetros empregados na solução numérica dada pelo *arc-length*.

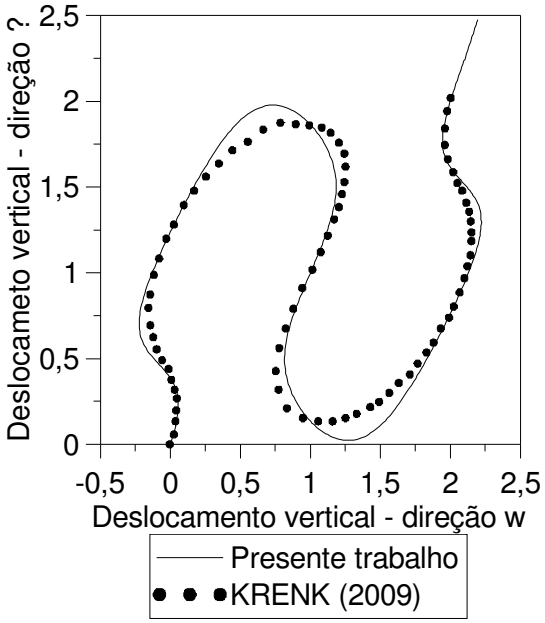
Figura 3.15 – Relações não lineares entre os deslocamentos (a) - deslocamento horizontal *u versus* deslocamento vertical *w* (b) deslocamento vertical *v versus* deslocamento horizontal *u* (c) deslocamento vertical *v versus* deslocamento vertical *w*



(a)

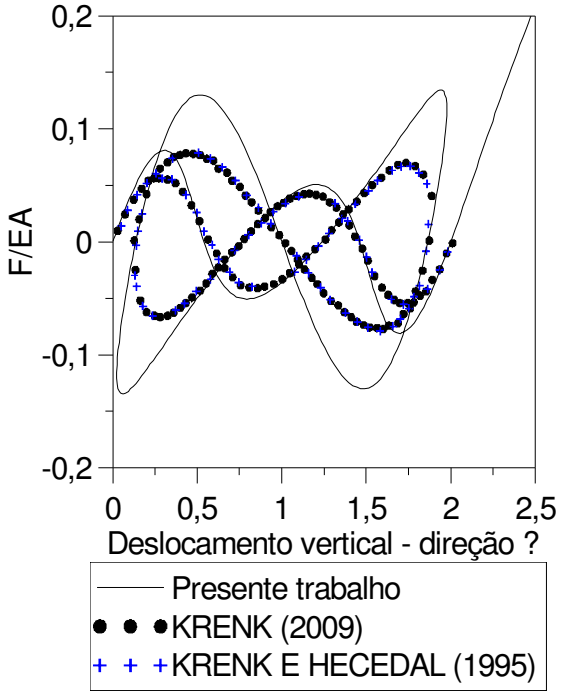


(b)

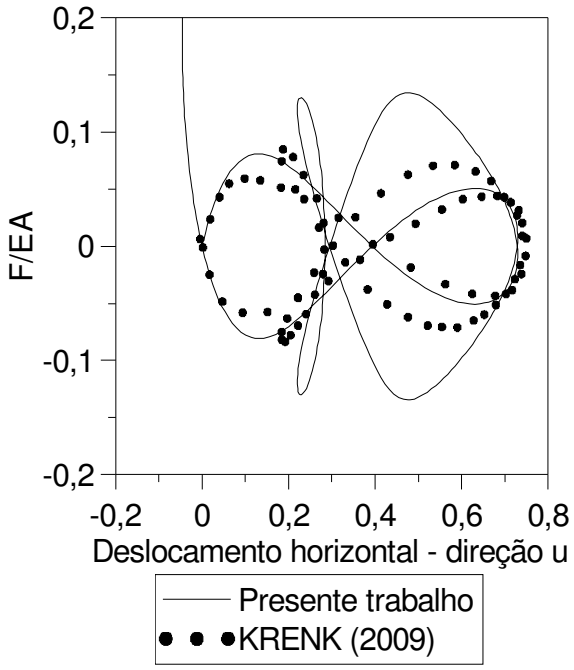


(c)

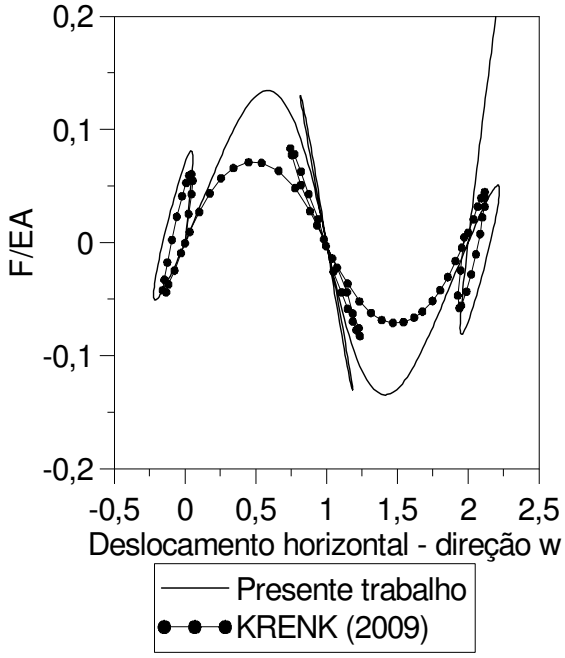
Figura 3.16 – Relações não lineares entre a carga *F* e os deslocamentos (a) - deslocamento vertical v *versus* F(b) deslocamento horizontal *u versus F* (c) deslocamento vertical *w versus F*.



(a)



(b)



(c)

Na Figura 3.17, são obtidos resultados complementares à literatura. Serão abordados somente as relações não lineares entre os deslocamentos, pois conforme ilustrado na Figura 3.15 os resultados obtidos para essas respostas possuem mais fidelidade aos resultados resultados obtidos por Krenk (2009). O efeito elastoplástico se deu quanto a utilização do modelo não linear isotrópico bilinear do tipo *hardening mises*, cujas variações das tensões de escoamento ocorreram para tensões de escoamento entre 0,5 a 0,1. A Figura 3.18 ilustra esse modelo para a tensão de escoamento de 0,5.

Figura 3.17 – Relações não lineares entre os deslocamentos considerando a plasticidade (a) - deslocamento horizontal *u* versus deslocamento vertical *w* (b) deslocamento vertical *v* versus deslocamento horizontal *u* (c) deslocamento vertical *v* versus deslocamento vertical *w* (d) legenda referente aos gráficos

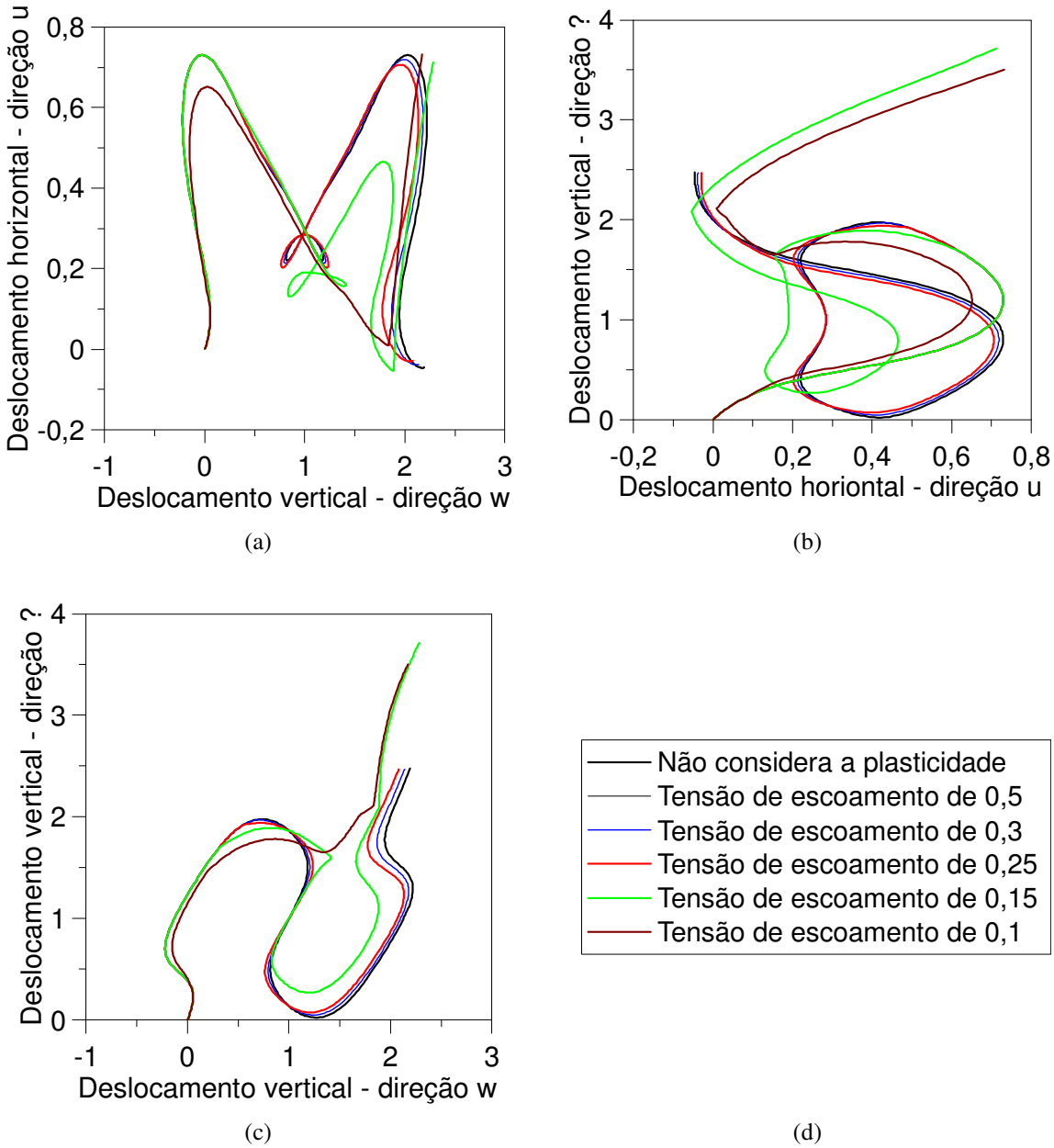
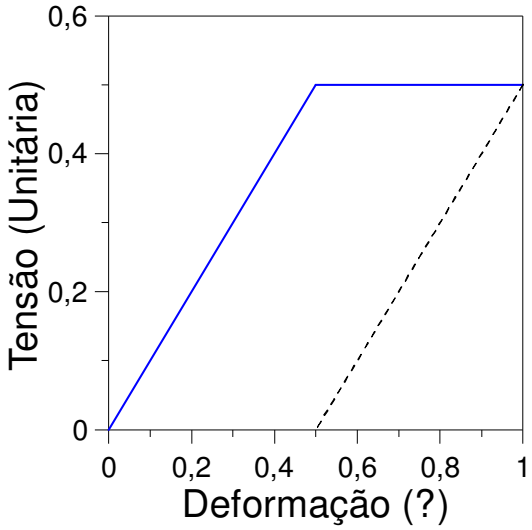


Figura 3.18 – Lei constitutiva do modelo não linear isotrópico bilinear do tipo *hardening mises*

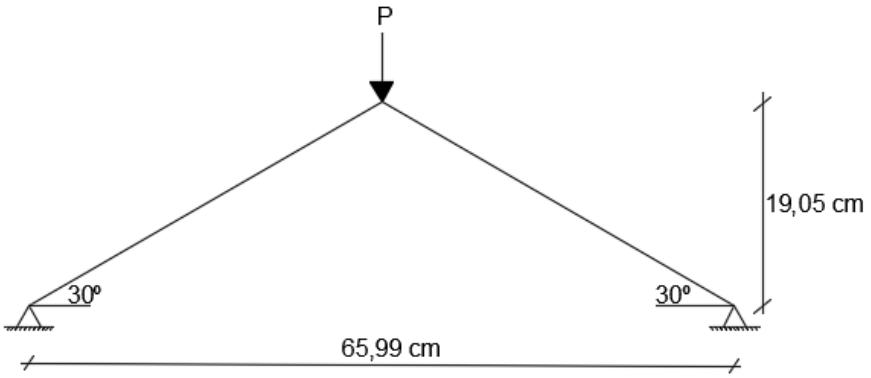


Por meio da Figura 3.17 é possível verificar que nas tensões de escoamento de 0,5 a 0,25 os valores das relações não lineares entre os deslocamentos possuem baixa variação e apresentam uma resposta qualitativa semelhante as respostas não lineares entre deslocamentos quando não se considera a plasticidade. Entretanto, ao avaliar a tensão de escoamento de 0,15 e 0,1 verifica-se que as respostas não lineares entre deslocamentos vão para uma configuração mais distante da resposta quando não considera a plasticidade. Nota-se que na Figura 3.17(c) para determinado deslocamento o comportamento das relações não lineares seguem por um caminho diferente do caminho obtido quando não se considera a plasticidade.

3.2.4 - Treliça plana de dois elementos

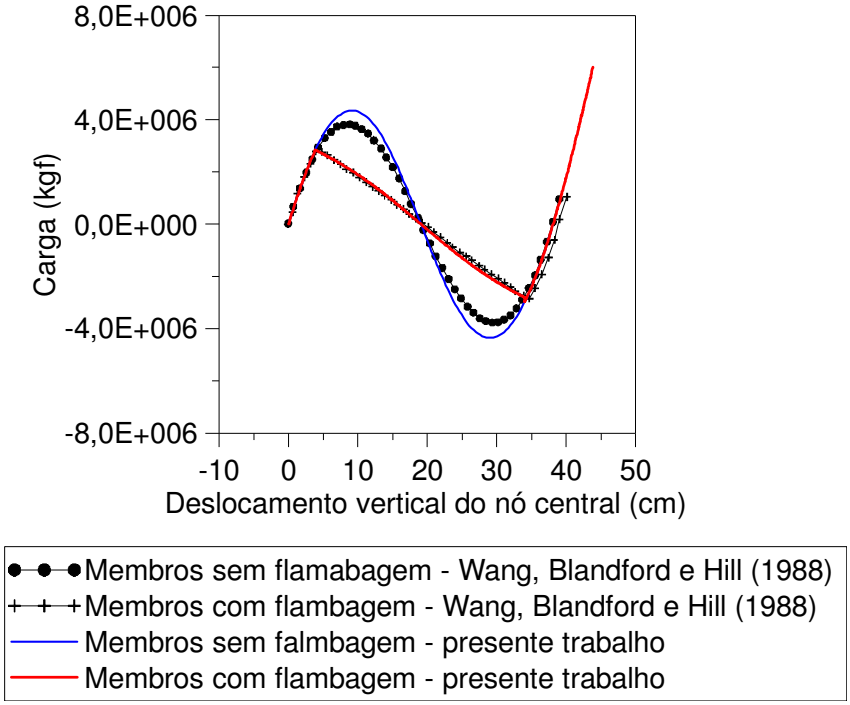
A treliça plana de 2 elementos da Figura 3.19 foi analisada por muitos pesquisadores como por exemplo Wang, Blandford e Hill (1988) que obtiveram a partir do programa de elementos finitos Space Truss Analysis Program (STAP) os resultados da trajetória de equilíbrio e, em seguida,compararam com aos resultados obtidos por Kondon e Atluri (1985). Estes resultados obtidos por Wang,Blandford e Hill (1988) serão utilizados como comparação aos resultados obtidos no presente trabalho a partir do *software* Ansys®. A geometria e o local de carregamento do exemplo são ilustrados na Figura 3.19. O módulo de elasticidade (*E*) das barras tem valor de $7{,}03 \times 10^5$ kgf/cm², a área da seção transversal das barras (*A*) é igual a 96,77 cm². O problema original não apresenta não linearidade física, entretanto resultados complementares serão apresentados no presente trabalho.

Figura 3.19 –Geometria da treliça plana de 2 elementos. Fonte: Wang, Blandford e Hill (1988)



Considerou-se duas situações para obtenção dos resultados, ilustrados na Figura 3.20: a primeira, utiliza-se para discretização do modelo numérico elementos LINK 180, não considerando, portanto, o efeito de flambagem localizado das barra da treliça; para a outra discretização, utiliza-se o elemento BEAM 188 em um dos membros da treliça, considerando, desta maneira, o efeito localizado da flambagem da barra da treliça como se fosse uma coluna comprimida.

Figura 3.20 – Carregamento versus deslocamento vertical do nó central da treliça plana de duas barras

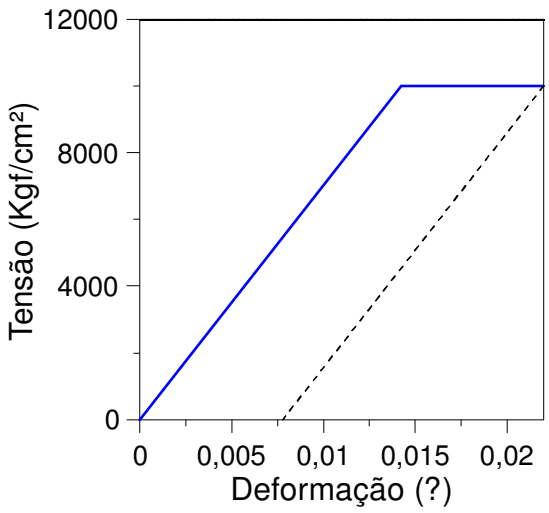


Nota-se que a resposta qualitativa obtida do Ansys® é semelhante a proposta no trabalho de Wang, Blandford e Hill (1988) e os resultados numéricos apresentam uma boa resposta com um erro percentual bem pequeno, conforme ilustra a Figura 3.20.Observa-se que a consideração da

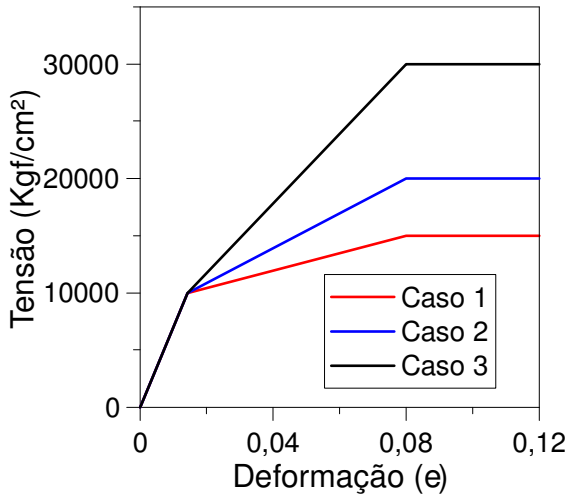
flambagem localizada da barra da treliça diminui o ponto limite da treliça em questão, antecipando o fenômeno de *snap-through* para um valor de carga e deslocamento inferiores quando comparados aos resultados que consideram apenas a perda de estabilidade global.

Resultados complementares à literatura são obtidos para contemplar a não linearidade física, mantendo-se a abordagem sem a consideração da flambagem local da barra da treliça. A Figura 3.21(a) mostra o gráfico da lei constitutiva para um material não linear isotrópico bilinear do tipo *hardening mises* cuja tensão de escoamento é de 10^4 kgf/cm². A Figura 3.21(b) representa as leis constitutivas de um material não linear isotrópico multilinear do tipo *hardening mises* para o primeiro, segundo e terceiro casos de variação de materiais multilineares estudados.

Figura 3.21 – Lei constitutiva do material (a) bilinear (b) multilinear



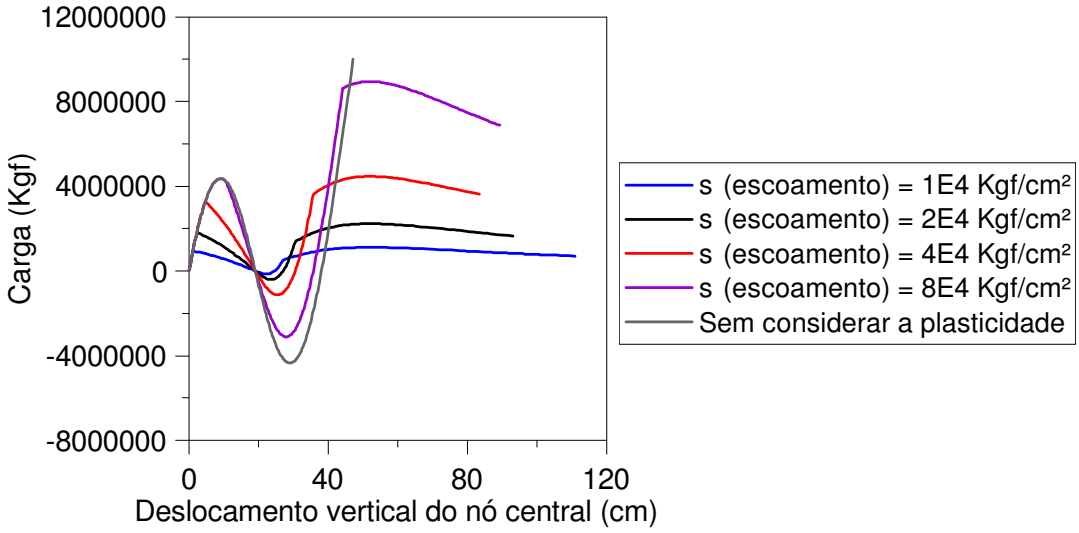
(a)



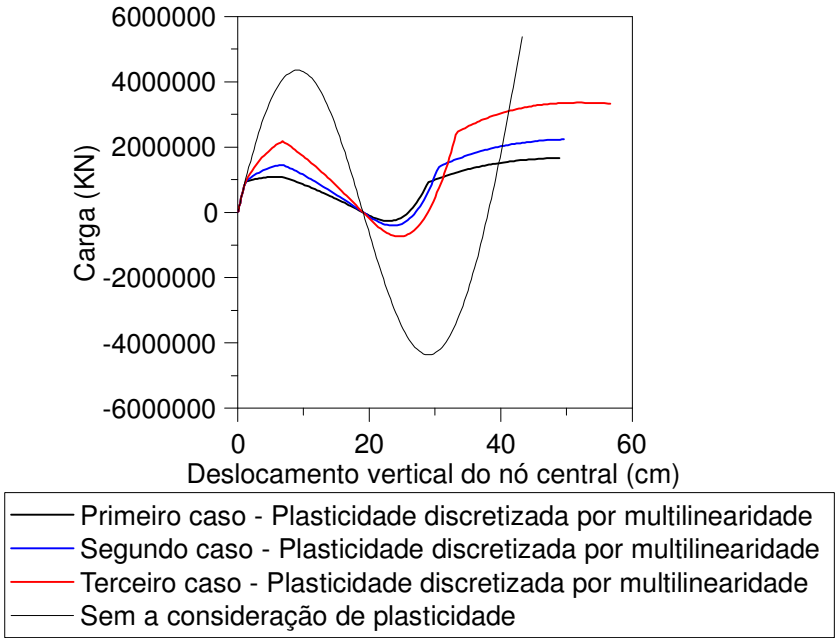
(b)

A Figura 3.22 apresenta a relação entre a carga *versus* o deslocamento vertical do nó central da treliça apresentado na Figura 3.19, considerando a relação constitutiva do material dada pela Figura 3.21(a) enquanto a figura 3.24 ilustra a relação de carga *versus* deslocamento para a relação constitutiva do material dada pela Figura 3.21(b). Ressalta-se que as respostas obtidas nas Figura 3.22 e Figura 3.23 consideram a discretização por meio do elemento LINK 180, apenas. Percebe-se nas Figuras 3.22 e 3.23 que a diminuição da tensão plástica provoca uma diminuição na carga limite, assim como no exemplo da seção anterior, tornando a estrutura mais flexível e mais suscetível aos fenômenos de perda de estabilidade.

Figura 3.22 - Relação entre a aplicação da carga versus o deslocamento vertical do nó central considerando a plasticidade inserida de forma bilinear com módulo de elasticidade nulo após a tensão de escoamento



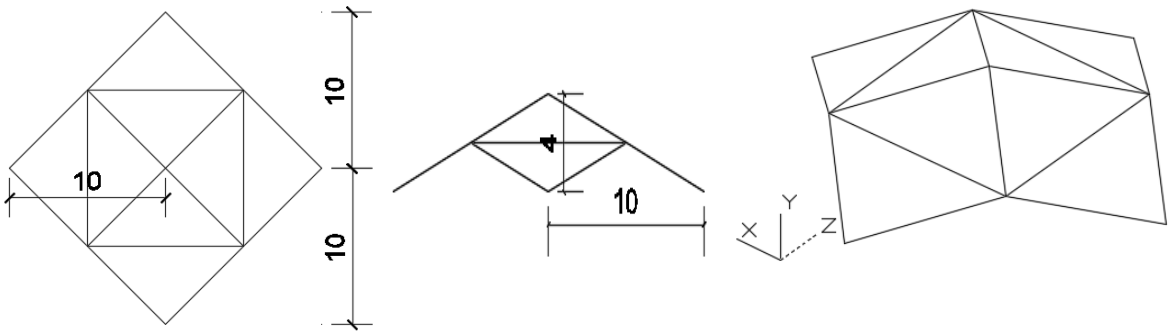
igura 3.23 - Relação entre a aplicação da carga versus o deslocamento vertical do nó central considerando a plasticidade inserida de forma multilinear



3.4.5 - Treliça espacial abatidade 16 elementos

Este modelo representa uma estrutura treliçada composta de 16 elementos, cujas dimensões e posição de aplicação de carga são ilustrados na Figura 3.24. A treliça apresenta 9 nós, onde os quatros nós periféricos possuem restrição de deslocamentos nulos. O módulo de elasticidade (E) tem valor de 10^7 libra/pol² e a área da seção transversal (A) igual a 1 polegada.

Figura 3.24 – Geometria e dados de construção da estrutura treliçada: (a) planta, (b) perfil e (c) vista isométrica



(a) (b) (c)

Os resultados são obtidos considerando uma relação entre deslocamento, referente ao nó central, e o carregamento aplicado. Hindra (2010) utilizou o software de elementos finitos NASTRAN® para obter o caminho de equilíbrio desta estrutura treliçada. No presente trabalho, por meio do software Ansys®, com a escolha do elemento LINK 180, foi possível obter o complexo caminho de equilíbrio, conforme ilustra a Figura 3.25. Nota-se que os valores e o comportamento qualitativo do caminho de equilíbrio do presente trabalho são satisfatórios quando comparados com os resultados obtidos por Hindra (2010). Verifica-se na trajetória de equilíbrio uma grande quantidade de *snap-through* e *snap-back* ressaltando os efeitos da não linearidade no caminho de equilíbrio.

A Tabela 3.1 representa os valores de deslocamento (polegadas) referente ao nó central e o carregamento (libras) suportada nos pontos limites de carga e deslocamento e compara com os valores obtidos por Hindra (2010). O primeiro ponto limite, verificado no software Ansys®, ocorre para a carga de $0{,}096 \times 10^5$ libras que representa a maior carga que pode ser suportada pela estrutura antes do primeiro *snap-through*. Após esse ponto, a estrutura se deforma sem capacidade de suportar algum incremento de carga, até encontrar uma outra posição de equilíbrio, dada pelo ponto 2 da Figura 3.25 que possui valor absoluto de carga limite semelhante ao do ponto 1. O caminho entre estes dois pontos é instável. A partir do ponto 2 a estrutura passa a ser, novamente, capaz de suportar incrementos de cargas adicionais, e durante este novo caminho de equilíbrio a estrutura torna-se novamente estável. A partir do ponto 4 é possível perceber a ocorrência de *snap-back*, que se repete nos pontos 5 e 6. Os pontos 8 e 9 apresentam *snap-through*. Na Figura 3.26 estão todas as deformadas da estrutura destacadas pelos pontos de um a dez da Figura 3.25.

Figura 3.25 – Relação entre carga e deslocamento vertical no nó central

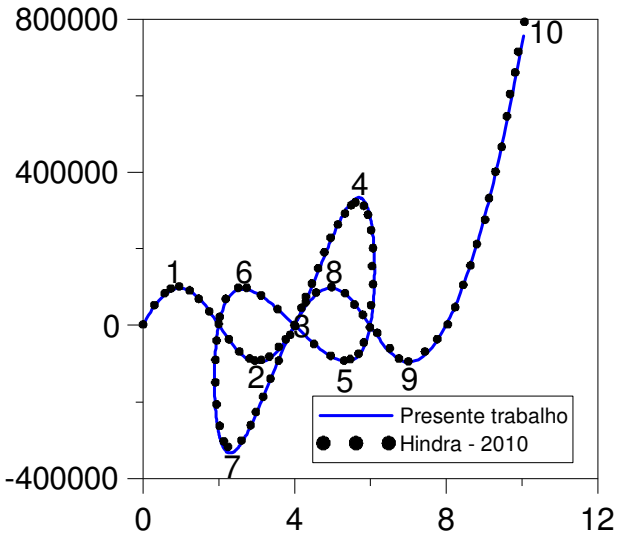
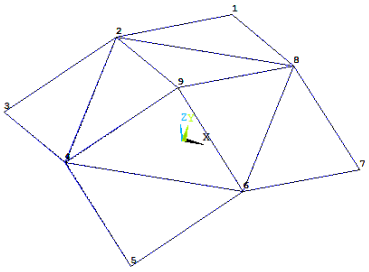


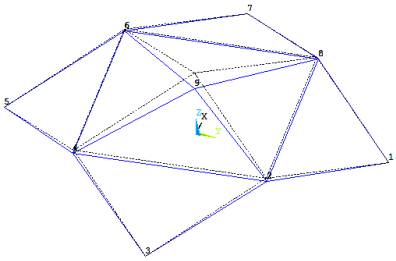
Tabela 1 - Dados numéricos da relação entre carga e deslocamento vertical no nó central

Pontos	Incrementos de Carga (libra) presente trabalho	Incrementos de Carga (libra) Hindra (2010)	Deslocamento (pol) presente trabalho	Deslocamento (pol) Hindra (2010)
1	0,09629 E6	0,096 E6	0,9977	0,97
2	-0,09679 E6	-0,096 E6	3,0572	3,09
3	0	0	3,9997	3,99
4	0,03337 E6	0,321 E6	5,6943	5,65
5	-0,09411 E6	-0,094 E6	5,3894	5,37
6	0,09408 E6	0,093 E6	2,6061	2,52
7	-0,03372 E6	-0,32 E6	2,3074	2,3
8	0,09674 E6	0,096 E6	4,9331	4,98
9	-0,09625 E6	-0,095 E6	6,9921	6,91
10	0,07557 E6	0,782 E6	10,05	10,05

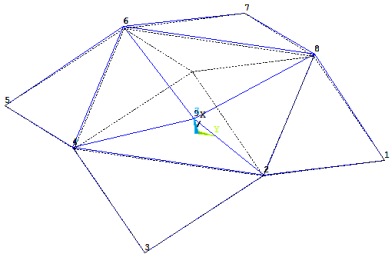
Figura 3.26 – Relação entre carga e deslocamento vertical no nó central



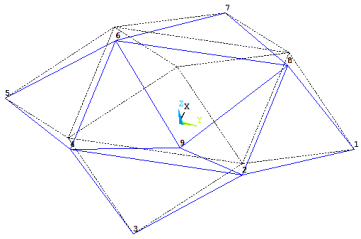
(a) Ponto 1



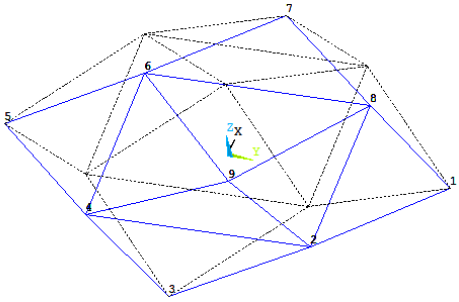
(b)Ponto 2



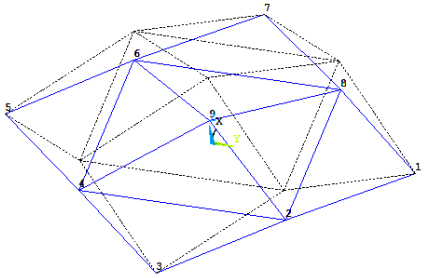
(c)Ponto 3



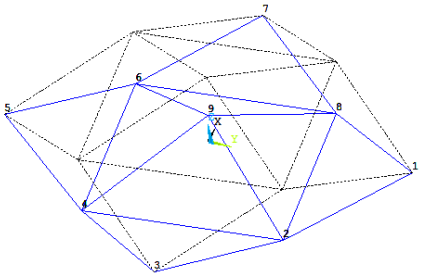
(d)Ponto 4



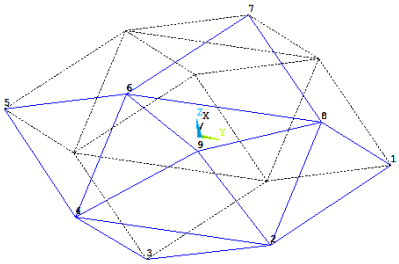
(e)Ponto 5



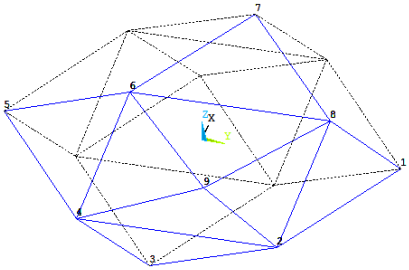
(f)Ponto 6



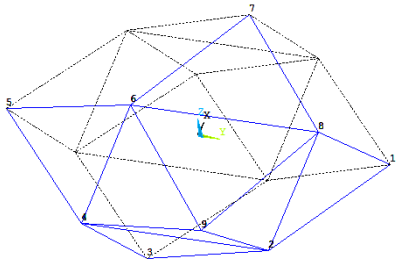
(g)Ponto 7



(h)Ponto 8



(i)Ponto 9



(j)Ponto 10

CONCLUSÕES

Este trabalho abordou o estudo da influência da lei constitutiva do material nos caminhos de equilíbrio de treliças espaciais, estabelecendo limites máximos de carregamento que garantam a segurança desse sistema e a verificação de fenômenos não lineares como pontos de limites de carregamento, *snap-through* e *snap-back*, por meio de uma vasta análise paramétrica da geometria, do carregamento aplicado e da lei constitutiva do material da treliça. A larga utilização deste tipo de sistema estrutural, a busca por racionalização dos materiais visando estruturas mais esbeltas, a contribuição para um melhor entendimento do processo de perda de instabilidade e fornecer ferramentas úteis à análise de outros tipos de estruturas compostas pelo mesmo sistema estrutural abordado neste trabalho foi a motivação deste trabalho.

A obtenção dos caminhos de equilíbrio de treliças planas e espaciais considerando a não linearidade geométrica e física foram obtidos para um total de cinco estruturas de treliças já estudadas em literaturas consagradas, discretizadas em elementos finitos pelos elementos LINK180 e BEAM188 que são elementos específicos da biblioteca do *software* empregado e se diferem pela consideração dos efeitos de flexão durante a análise não linear. Respostas de carga *versus* deslocamento, deslocamento horizontal *versus* deslocamento vertical, carga em função da variação de um parâmetro da geometria, ou da lei constitutiva do material, e configurações deformadas da estrutura foram obtidas.

O primeiro exemplo refere-se a uma treliça plana de 3 elementos que serviu para avaliar a resposta obtida pelo Ansys® ao considerar a não linearidade física. O segundo exemplo refere-se a uma treliça espacial, um domo de 24 elementos, para verificar a influência das não linearidades físicas e geométricas no comportamento não linear da treliça espacial. Neste exemplo constatou-se que a inserção da plasticidade reduziu a carga limite, o que já era esperado. O terceiro exemplo, uma treliça espacial de 12 barras, obteve-se inúmeros *snap-through* e *snap-back* ao longo do complexo caminho de equilíbrio, apresentando uma boa precisão numérica para as relações não lineares entre os deslocamentos e uma convergência numérica não tão boa para as relações não lineares entre carga *versus* deslocamento. O quarto exemplo refere-se a uma treliça plana de 2 elementos a qual serviu para verificar a influência da consideração da flambagem em um modelo de treliça. No quinto exemplo, e último, abordou-se uma treliça espacial abatida de 16 elementos, apresentando inúmeros *snap-through* e *snap-back* ao longo do caminho de equilíbrio. Neste

quinto exemplo, não se inseriu a não linearidade física no problema, mas é possível observar a alta complexidade do caminho não linear de equilíbrio.

Foi possível obter caminhos não lineares de equilíbrio completos para os sistemas de treliças abordados, nos quais foi possível verificar pontos limites máximos de carregamento para o qual a estrutura não perca estabilidade. De acordo com os exemplos analisados, as trajetórias nos caminhos de equilíbrio apresentavam inúmeros *snap-through* e *snap-back* e em algumas destas geometrias foram obtidos resultados para verificar a influência da variação da área da seção transversal dos elementos da treliça, da variação e da inclusão da tensão plástica de escoamento do material assim como o ciclo de histerese, característico de processos com carregamento e descarregamento aplicados a estrutura.

Além disso, o Ansys® apresentou bastante fiel aos métodos utilizados pelos autores, cujas respostas foram comparadas– o comportamento não linear e os valores permaneceram bastante próximos para a maioria das geometrias analisadas neste trabalho, indicando que é possível utilizar o Ansys® para a obtenção dos caminhos não lineares de equilíbrio de treliças espaciais.

REFERÊNCIAS

ANSYS, Inc. **StructuralAnalysisGuide**, versão 12.0,. Disponível em http://orange.engr.ucdavis.edu/Documentation12.0/120/ans_str.pdf

BARRIGÓ, J. **Non linear analysis of spatial truss**. 2014

BAŽANT, Z. P. Structural stability. **International journal of solids and structures**, v 37, i. 1-2, p. 55-67, 2000. ISSN 0020-7683

BAŽANT, Z. P.; CEDOLIN, L. **Stability of structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage theories**. 1. ed. reimp. Singapore: WSP, 2010. 1011 p.

BLANDFORD G. E. **Progressive failure analysis of inelastic space truss structures,** Comput. &Struct. 58 (1996) 981–990.

BONET, J.; GIL, A. J.; WOOD, R. D. **Worked examples in nonlinear continuum mechanics for finite element analysis**. 2012.

BORGES, A. C. L**. Análise de pilares esbeltos de concreto armado solicitados a flexo-compressão oblíqua**. São Carlos, 1999.

CRISFIELD, M. A. **A fast incremental/iterative solution procedure that handles "snap-through".** Transport and Road Research Laboratory, Department of the Environment, Crowthornc, Berkshire RGl 1 6AV, England. 1981.

CRISFIELD, M. A. **Non-linear finite element analysis of solids and structures**, v. 1. Chichester: John Wiley & Sons, 1991. 345p. CRISFIELD, M. A. Non-linear finite element analysis of solids and structures, v. 2. Chichester: John Wiley & Sons, 1997. 494p.

CROLL, J. G. A.; WALKER, A. C. **Elements of structural stability**. 1. ed., 223 p. New York: Wiley, 1972.

FORDE, B. W. R.; STIEMER, S. F. **Improved arc length orthogonality methods for nonlinear finite element analysis**. Computers and Structures, v. 27, n. 5, p. 625-630, 1987.

GERE, J. M.; TIMOSHENKO, S. P. **Mechanics of materials**. 3. ed., 807 p. Boston: PWS, 1990.

GRECO, M.; VENTURIN, W.S. **Stability analysis of three-dimensional trusses**. Latin American Journal of Solids and Structures, an ABCM Journal, [S.l.], 2006, p. 325-344, ISSN 1679-7825.

GRECO *et al*. **Nonlinear positional formulation for space truss analysis**. FiniteElements in Analysisand Design 42, 1079 – 1086, 2006.

HILL C. D; BLANDFORD G.E; WANG S.T. Post**-buckling analysis of steel space trusses**, J. Struct. Eng., ASCE 115 (1989) 900–919.

HRINDA, G. A. **Snap-Through Instability Patterns in Truss Structures.***NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia 2383,*2010.

KONDOH K.; ATLURI S. N. (1985). **Influence of Local Buckling on Global Instability: Simplified, Large Deformation, Post-Buckling Analyses of Plane Trusses**. Computers and Structures, Vol. 21, No.4, pp. 613-627.

KRISHNAMOORTHY, C. S. *et al*. **Postbuckling analysis of structures by threeparameter constrained solution techniques**. Finite Elements in Analysis and Design, v. 22, p. 109-142, 1996.

KRENK, S. **Non linear modelinganalysisos solids and structures**. Cambridge, UK: Cambridge, 2009.

KRENK, S., HEDEDAL, O. **Dual ortogonalityprocedure for nonlinear finite element equations**, Engineering Mechanics, Department of Buiding Technology and Structural Engineering, Aalborg Universitetscenter, Denmark, Nº. 12, p. 01-18, 1993.

KRENK, S., HEDEDAL, O. A **dual ortogonality procedure for nonlinear finite element equations**. Comput. MethodsAppl. Mech. Engrg, v. 123, p. 95-107.1995.

KRISHNAMOORTHY C.S.; RAMESH G.; DINESH K.U. **Post-buckling analysis of structures by three-parameter constrained solution techniques**, Finite Elem. Anal. Des. 22 (1996) 109–142.

LACERDA, E. G. M. **Análise não linear de treliças pelo método dos elementos finitos posicional**. Natal: 2014.

GONÇALVES, P.**Uma introdução à instablidade das estruturas**.Puc Rio. Rio de Janeiro: 1993.

MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas dinâmicos**. 3. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011. 670 p.

OÑATE, E., MATIAS, W. T. **A Critical displacement approach for predicting structural instability**. Computers Methods in Applied Mechanics Engineering, v. 134, p. 135-161, 1996.

PAPADRAKAKIS, M. **Post-buckling Analysis of Spatial Structures by Vector Iteration Methods**, Comput. Struct., v. 14(5-6), p. 393-402. 1981.

PAPADRAKAKIS M**. Inelastic post-buckling analysis of trusses**. Jornal of Struct Eng. 1983

PINHEIRO, L.; SILVEIRA, R. A. M. **Análise da estabilidade elástica de treliças espaciais**. Ouro Preto: 2004.

PINHEIRO, L. **Análises Não-Lineares de Sistemas Estruturais Metálicos Rotulados e Semi-Rígidos**. 2003.

PINTO, R. S. **Não linearidade física e geométrica no projeto de edifícios usuais de concreto armado**. 1997.

SAVI, M. A. **Dinâmica não linear e caos**. Rio de Janeiro: E- Papers Serviços Editoriais, 2006. 304 p.

THAI, H.; KIM, S. **Nonlinear inelastic time-history analysis of truss structures.** Department of Civil and Environmental Engineering, Sejong University, 98 Kunja Dong Kwangjin Gu, Seoul 143-747, Republic of Korea. 2011.

WANG T. S.; BLANDFORD G. E; e HILL C. D. **Nonlinear Analysis of Steel Space Trusses**, 1988.

YANG Y. B.; KUO S. R. **Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures**, Prentice Hall. 1994.